INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXII. BAND FÜNFTES HEFT 1954

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 9,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.- Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnerstr. 12
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen, Augsburg**, MAN

einsenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2440 u. 5430

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N. W. 1.

Inhalt:

Seite

Speidel, L., Berechnung der Strömungsverluste von ungestaffelten ebenen Schaufelgittern. Mit 21 Textabbildungen 295

Nitsiotas, G., Kriechen und Schwinden bei statisch unbestimmten Betonkonstruktionen mit Tragteilen aus Stahl 323

Rüdiger, D., Der Spannungs- und Verschiebungszustand drehsymmetrischer Membrane mit beliebig gekrümmter Meridiankurve. Mit 1 Textabbildung 336

Mewes, E., Darstellung räumlicher Kräftesysteme durch rechtwinklige Kraftkreuze. Mit 15 Textabbildungen 348

INGENIEUR-ARCHIV

XXII. BAND FÜNFTES HEFT 1954

Berechnung der Strömungsverluste von ungestaffelten ebenen Schaufelgittern*.

Von L. Speidel.

1. Einleitung und Aufgabenstellung. Das wichtigste Bauelement einer Strömungsmaschine ist das Schaufelgitter. Seine Aufgabe besteht in der Energieübertragung zwischen dem strömenden Medium und dem umlaufenden Rad. Diese Energieübertragung wird erreicht durch eine Richtungsänderung der Strömung, die naturgemäß mit möglichst geringem Energieverlust durchgeführt werden soll, um einen guten Gesamtwirkungsgrad der Maschine zu erhalten.

Bei dem Entwurf einer Strömungsmaschine muß für das Schaufelgitter die Richtungsänderung der Strömung sowie deren Energieverlust bekannt sein. Von besonderem Interesse sind dabei diejenigen Gitteranordnungen, die bei einer vorgegebenen Richtungsänderung die geringsten Verluste hervorrufen (günstigste Gitter), wobei noch Nebenbedingungen im Hinblick auf Kavitation, Verdichtungsstöße, Festigkeit, Fertigung u. ä. erfüllt sein müssen.

Der Zusammenhang zwischen den geometrischen und aerodynamischen Eigenschaften der Gitter kann nicht allein auf experimentellem Wege ermittelt werden, da die Zahl der maßgeblichen geometrischen Parameter viel zu groß ist. Deshalb hat man schon frühzeitig versucht, diese Fragen wenigstens teilweise theoretisch zu beantworten. Dabei haben im wesentlichen zwei Verfahren Eingang in die praktische Berechnung von Strömungsmaschinen gefunden:

1. Stromfadentheorie: Bei enger Schaufelteilung wird mit schaufelkongruenter Strömung gerechnet, wobei der Teilungseinfluß durch halbempirische Korrekturen erfaßt wird (Winkelübertreibung). Das Verfahren ist auf beliebige Formen des Gitters anwendbar (Axialgitter, Radialgitter, Kombinationen beider Formen), versagt aber bei weiten Teilungen und dicken Profilen. Die Strömungsverluste werden teilweise recht grob aus einigen wenigen Messungen übernommen, so daß günstigste Gitter nur durch spezielle Messungen ermittelt werden können.

2. Tragflügeltheorie: Die Meßergebnisse von Tragflügeln werden auf das ebene Gitter (Idealisierung des Axialgitters) übertragen, indem man dieses als Summe von Einzeltragflügeln auffaßt. Dabei erhält man neben der Strömungsumlenkung auch den Gitterverlust. Die Zulässigkeit dieser Betrachtungen ist aber auf weite Teilungen beschränkt, weil sonst durch die gegenseitige Beeinflussung der Profile die am Einzelprofil gewonnenen Meßergebnisse nicht mehr auf das Schaufelgitter übertragbar sind. Damit ist das Verfahren im wesentlichen auf schnelläufige Maschinen beschränkt.

Es lag nun nahe, zur Überbrückung der recht großen Lücken die in der Flugzeugaerodynamik bewährten Rechenmethoden auf das Schaufelgitter zu übertragen. Man beschränkte sich dabei vorerst auf ebene Gitter in reibungsloser Strömung. Für die Bestimmung des Strömungsverlaufes wurden dabei zwei Wege beschritten. Einmal wurde die Methode der konformen Abbildungen[1] verwandt, die ihrem Wesen nach auf das zweidimensionale Problem beschränkt ist, aber exakte Ergebnisse bei sehr hohem Rechenaufwand liefert. Zum anderen wurde das Singularitätenverfahren[1] benutzt, bei dem das Profil durch Singularitäten (eine Quell-Senken- und Wirbelverteilung) derart ersetzt wird, daß die Kontur eine Stromlinie wird. Der Rechenaufwand ist gegenüber der konformen Abbildung wesentlich geringer, so daß sich das Verfahren gut für systematische Rechnungen eignet. Es ist auch auf den dreidimensionalen Fall anwendbar.

---

* Gekürzte Fassung der Braunschweiger Dissertation 1953; Hauptberichter: Prof. Dr. *H. Schlichting*; Mitberichter: Prof. Dr. *C. Pfleiderer*. Auszugsweise vorgetragen auf der Tagung des VDI-Fachausschusses für Strömungstechnik in Zürich, 9. bis 11. Juni 1954. Diese Untersuchungen wurden durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt.

[1] Eine umfangreiche Literaturzusammenstellung von Arbeiten der Gitterberechnung nach konformen Abbildungen und dem Singularitätenverfahren befindet sich in der Arbeit von *H. Schlichting* und *N. Scholz*, Ing.-Arch. 9 (1951), S. 42.

Bei Vernachlässigung der Flüssigkeitsreibung kann ein Gitterverlust naturgemäß nicht ermittelt werden. Die aus der reibungslosen Strömung errechneten aerodynamischen Beiwerte weichen aber auch sonst teilweise recht erheblich von denen der wirklichen Strömung ab, so daß die Ergebnisse der Theorie der reibungslosen Gitterströmung bisher nur wenig Eingang in die praktische Berechnung von Strömungsmaschinen finden konnten.

Neuerdings haben nun erstmalig *H. Schlichting* und *N. Scholz*[1] ein Verfahren für die theoretische Berechnung der Strömung durch ein ebenes Schaufelgitter mit Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung angegeben und dabei insbesondere die Verlustbeiwerte theoretisch ermittelt. Dieses Rechenverfahren, welches in einer Anwendung der Grenzschichttheorie auf die Gitterströmung besteht, war zunächst auf unendlich dünne Profile beschränkt. Aber grundsätzlich ist damit der Weg gezeigt worden, wie man für das ebene Schaufelgitter alle aerodynamischen Eigenschaften, Geschwindigkeitsverteilung, Richtungsänderung der Strömung und Verlustbeiwert in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern (Dicke, Wölbung, Teilung, Staffelung) berechnen kann. Eine experimentelle Nachprüfung der theoretischen Ergebnisse ist unbedingt erforderlich, doch kann sie auf einzelne Stichproben beschränkt bleiben.

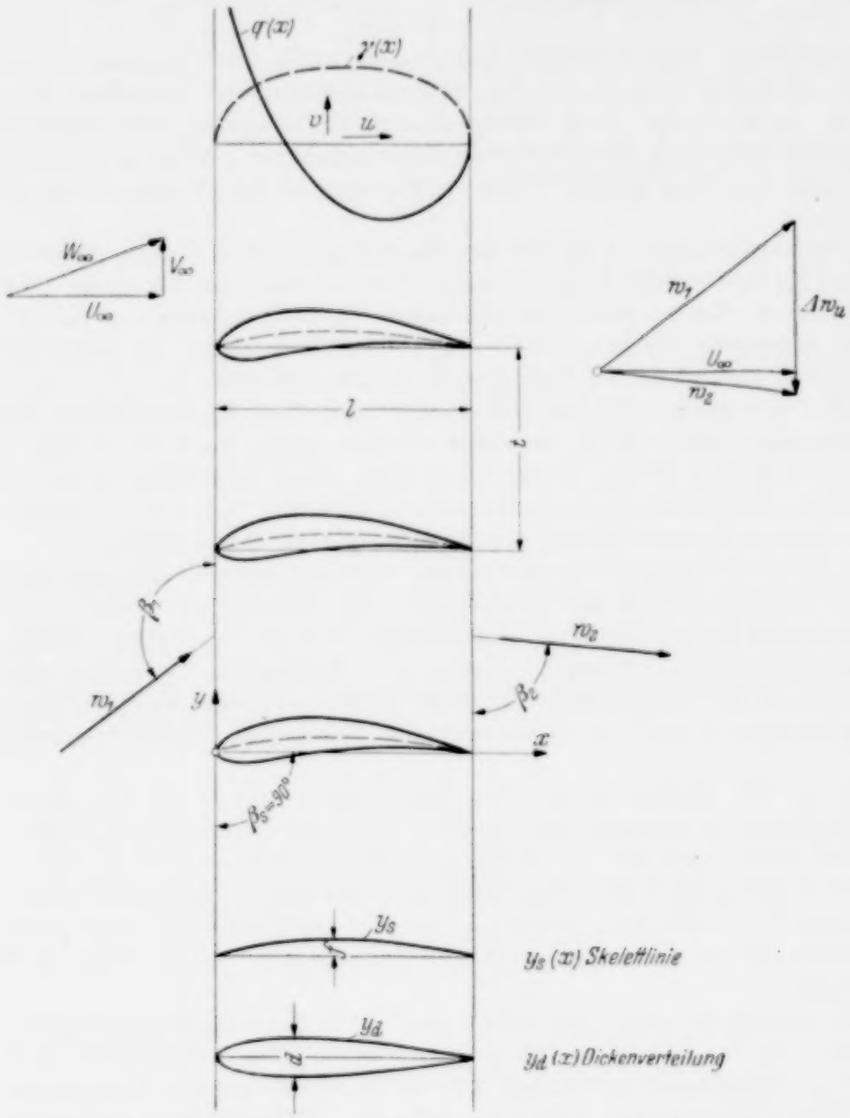


Abb. 1. Bezeichnungen am ungestaffelten Gitter. Ersatzsystem aus Singularitäten. Potentialtheoretisches Ersatzsystem: $q(x)$ Quellverteilung, $\gamma(x)$ Zirkulationsverteilung, W_∞ überlagerte Parallelströmung, (U_∞, V_∞ Komponenten in x und y-Richtung), u, v induzierte Geschwindigkeiten, (u parallel x, v parallel y); Geometrische Parameter: t Teilung, β_s Schaufelwinkel, f Profilwölbung, d Profildicke.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das Rechenverfahren von *H. Schlichting* und *N. Scholz* auf Gitter aus Profilen endlicher Dicke erweitert werden. Da die Berechnung der reibungslosen Strömung für ein gestaffeltes Gitter noch erhebliche Schwierigkeiten bereitet, soll die vorliegende Untersuchung auf das ungestaffelte Gitter beschränkt bleiben, bei welchem diese Schwierigkeit entfällt[2]. Der Gang der Rechnung für ein Gitter aus Schaufeln endlicher Dicke verläuft dann ähnlich, wie er von *Schlichting* und *Scholz* für unendlich dünne Schaufeln angegeben wurde. Er besteht aus den folgenden Schritten:

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 295.

[2] Inzwischen ist für ein Gitter beliebiger Staffelung und Teilung die Berechnung der Potentialströmung nach dem Singularitätenverfahren allgemein gelöst worden. Die erste Hauptaufgabe (gegeben die aerodynamischen, gesucht die geometrischen Parameter) wurde behandelt von *N. Scholz*, Ein Berechnungsverfahren zum Entwurf von Schaufelgitterprofilen; VDI-Forschungsheft Nr. 442. Die Lösung der zweiten Hauptaufgabe (gegeben die geometrischen, gesucht die aerodynamischen Beiwerte) wurde angegeben von *H. Schlichting*, Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter; unveröffentlichter Bericht 1952, erscheint demnächst als VDI-Forschungsheft.

1. Für ein vorgegebenes Gitter wird die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung nach dem Singularitätenverfahren bestimmt.

2. Auf Grund dieser Geschwindigkeitsverteilung wird nach einem bekannten Verfahren die Grenzschicht berechnet.

3. Der Verlauf der Verdrängungsdicke der Grenzschicht bedingt eine scheinbare Änderung der Schaufelkontur, die eine Änderung der reibungslos gerechneten Werte von Auftrieb und Abströmrichtung zur Folge hat.

4. Aus den Grenzschichtwerten an der Hinterkante des Profiles wird der Verlustbeiwert berechnet.

Nach diesem Verfahren lassen sich dann die aerodynamischen Beiwerte in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern ermitteln.

Um nun den Einfluß der wesentlichsten geometrischen Parameter Profildicke und -wölbung sowie Gitterteilung — der Schaufelwinkel ist beim ungestaffelten Gitter mit $\beta_s = 90°$ konstant — auf die aerodynamischen Parameter zu erkennen, sollen einige Gitteranordnungen systematisch durchgerechnet werden. Dabei sollen besonders die günstigsten Anordnungen ermittelt werden, die bei einer vorgegebenen Richtungsänderung die geringsten Gitterverluste hervorrufen.

Die Rechnungen sind teilweise mit unveröffentlichten Messungen von *N. Scholz* verglichen worden.

2. Reibungslose Strömung. a) Grundlagen, induzierte Geschwindigkeiten bei vorgegebener Singularitätenverteilung. Zur Bestimmung der Potentialströmung werden die Gitterschaufeln durch Singularitätenverteilungen, nämlich eine Quell-Senkenverteilung $q(x)$ und eine Wirbelverteilung $\gamma(x)$, derart ersetzt, daß die Schaufelkontur eine Stromlinie wird. Dabei verschwindet die Gesamtergiebigkeit der Quellen

$$\int_0^t q(x)\,dx = 0\,,$$

da sich die Profilkontur schließen muß. Das Integral über die Wirbelverteilung ergibt die Gesamtzirkulation einer Schaufel

$$\Gamma = \int_0^t \gamma(x)\,dx\,.$$

Es ergeben sich nun wesentliche Rechenvereinfachungen, wenn man die Singularitäten auf der Profilsehne (x-Achse) und nicht, wie exakt notwendig, auf der Skelettlinie anordnet. Diese Vereinfachung hat sich bei nicht zu stark gewölbten Profilen als brauchbar erwiesen. Für das Schaufelgitter erhält man dann das in Abb. 1 dargestellte Ersatzsystem. Für die folgende Rechnung werden nun die auf der Profilsehne (x-Achse) induzierten Geschwindigkeiten benötigt. Diese setzen sich aus einem Anteil der Zirkulationsverteilung (Index γ) und einem der Quellverteilung (Index q) zusammen. Bei der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten erweist es sich weiter als zweckmäßig, diese in einen Anteil des Einzelprofiles (Index E) und einen des Restgitters (Index G), d. i. der Schaufelreihe ohne das Einzelprofil, aufzuteilen. Man erhält dann für die induzierten Geschwindigkeiten (u in Richtung der x-Achse, v senkrecht dazu)

$$\left.\begin{aligned} u &= u_\gamma + u_q = u_{\gamma E} + u_{\gamma G} + u_{qE} + u_{qG}\,, \\ v &= v_\gamma + v_q = v_{\gamma E} + v_{\gamma G} + v_{qE} + v_{qG}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wie schon *Pistolesi*[1] gezeigt hat, ergeben sich für das ungestaffelte Gitter die induzierten Geschwindigkeiten u_q und v_γ auf der Schaufelsehne nach dem Biot-Savartschen Gesetz zu

$$u_q = \frac{1}{2t}\int_{x'=0}^{t} q(x')\,\mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi}{t}(x-x')\right]dx'\,, \tag{2a}$$

$$v_\gamma = -\frac{1}{2t}\int_{x'=0}^{t} \gamma(x')\,\mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi}{t}(x-x')\right]dx'\,. \tag{2b}$$

Die in dem Integranden auftretende Unendlichkeitsstelle kann man durch Zerlegen in die indu-

[1] *E. Pistolesi*, Aerotechnica 17 (1937).

zierten Geschwindigkeiten des Einzelprofiles und die des Restgitters auf die vom Einzelprofil bekannte Form zurückführen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} u_{qE} &= \frac{1}{2\pi}\int_{x'=0}^{l} q(x')\,\frac{dx'}{x-x'}\,, \\ u_{qG} &= u_q - u_{qE} = \frac{1}{2t}\int_{x'=0}^{l} q(x')\left|\operatorname{Ctg}\left[\frac{\pi}{t}(x-x')\right| - \frac{t}{\pi(x-x')}\right|dx'\,, \\ v_{\gamma E} &= -\frac{1}{2\pi}\int_{x'=0}^{l} \gamma(x')\,\frac{dx'}{x-x'}\,, \\ v_{\gamma G} &= v_\gamma - v_{\gamma E} = -\frac{1}{2t}\int_{x'=0}^{l} \gamma(x')\left|\operatorname{Ctg}\left[\frac{\pi}{t}(x-x')\right| - \frac{t}{\pi(x-x')}\right|dx'\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Bei den induzierten Geschwindigkeiten u_γ und u_q nach (1) liefert beim ungestaffelten Gitter nur das Einzelprofil einen Beitrag, der Anteil des Restgitters verschwindet aus Symmetriegründen. Man erhält also

$$\left.\begin{aligned} u_\gamma &= u_{\gamma E} = \pm\frac{\gamma}{2}\,, \qquad u_{\gamma G} = 0\,, \\ v_q &= v_{qE} = \pm\frac{q}{2}\,, \qquad v_{qG} = 0\,. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ \text{Oberseite} \\ &- \text{Unterseite} \end{aligned} \tag{4}$$

Mit diesen induzierten Geschwindigkeiten ist zusammen mit der überlagerten Parallelströmung (U_∞ Komponente in x-Richtung, V_∞ Komponente in y-Richtung) die Gesamtgeschwindigkeit auf der Profilsehne bekannt. Die Geschwindigkeit auf der Profilkontur läßt sich daraus dann nach einer von *F. Riegels*[1] angegebenen Beziehung ermitteln. Ist $y'_K = dy_K/dx$ die Neigung der Kontur, dann ist nach *Riegels* die Geschwindigkeit auf der Profilkontur

$$w_K = \frac{U_\infty + u}{\sqrt{1 + y'^2_K}}\,. \tag{5}$$

b) Zusammenhang zwischen der Profilgeometrie und der Singularitätenverteilung. Der Zusammenhang zwischen der Singularitätenverteilung und der Geometrie des Schaufelgitters wird durch die kinematische Strömungsbedingung gegeben, die besagt, daß die Geschwindigkeit an der Kontur tangential zur Wand verlaufen muß. Da die induzierten Geschwindigkeiten in der Nähe der x-Achse (Profilsehne) praktisch von y unabhängig sind, kann man die kinematische Strömungsbedingung mit den im vorigen Abschnitt ermittelten induzierten Geschwindigkeiten auf der Profilsehne für das ungestaffelte Gitter schreiben

$$\frac{dy_K}{dx} = \frac{V_\infty + v_\gamma + v_q}{U_\infty + u_q + u_\gamma} = \begin{cases} \dfrac{V_\infty + v_\gamma \pm \frac{q}{2}}{U_\infty + u_q} & + \text{ Oberseite} \\ \dfrac{V_\infty + v_\gamma}{U_\infty + u_q \pm \frac{\gamma}{2}} & - \text{ Unterseite}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Da in der Regel $\gamma/2$ klein gegen die übrigen Summanden des Nenners ist, kann man diesen Anteil in erster Näherung vernachlässigen. Dann läßt sich die kinematische Strömungsbedingung (6) in einen symmetrischen Teil für die Dickenverteilung $y_d(x)$ und einen antisymmetrischen Teil für die Skelettlinie $y_s(x)$ aufspalten ($y_K = y_s \pm y_d$), und man erhält für das ungestaffelte Gitter[2]

$$y'_d = \frac{q/2}{U_\infty + u_q}\,, \qquad y'_s = \frac{V_\infty + v_\gamma}{U_\infty + u_q}\,. \tag{7a, b}$$

[1] *F. Riegels*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 373.

[2] Es sei darauf hingewiesen, daß für den Einzelflügel diese beiden kinematischen Strömungsbedingungen bisher allgemein in der vereinfachten Form

$$y'_d = \frac{1}{2}\,\frac{q}{U_\infty}\,, \qquad y'_s = \frac{V_\infty + v_\gamma}{U_\infty}$$

verwendet werden, also unter Vernachlässigung der induzierten Geschwindigkeit längs der Sehne, $u_{qE} = 0$. Für das Gitter erscheint es jedoch angebracht, die induzierte Geschwindigkeit u_q zu berücksichtigen, da sie im allgemeinen nicht in gleicher Weise klein gegen U_∞ ist wie u_{qE}.

Es ist demnach beim ungestaffelten Gitter die Dickenverteilung nur von der Quellverteilung abhängig, und die Wölbungsverteilung kann aus der Zirkulationsverteilung berechnet werden, wenn u_q aus der Dickenverteilung bekannt ist[1]. Durch diese Tatsache wird die Lösung der zweiten Hauptaufgabe, die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung bei vorgegebener Kontur, beim ungestaffelten Gitter wesentlich erleichtert.

Aus der kinematischen Strömungsbedingung (7a) folgt bei gegebener Dickenverteilung y_d die Quellverteilung zu

$$q(x) = 2\,(U_\infty + u_q)\,y_d' \,. \tag{8}$$

Damit erhält man dann bei gegebener Dickenverteilung aus (2a) eine Integralgleichung für u_q. Die mühsame Lösung dieser Integralgleichung läßt sich umgehen, wenn man in erster Näherung in (8) die induzierte Geschwindigkeit u_q durch ihren Mittelwert über die Profiltiefe

$$u_q = \frac{1}{l}\int_0^l u_q(x)\,dx \tag{9}$$

ersetzt. Der entstehende Fehler ist gering, da beim ungestaffelten Gitter $u_q(x)$ nur in extremen Fällen (große Dicke und enge Teilung) eine starke Abhängigkeit von x aufweist. Man erhält dann für die Quellverteilung in erster Näherung

$$q(x) = 2\,(U_\infty + \bar{u}_q)\,y_d' \,, \tag{8a}$$

womit man jetzt aus (2a) für u_q die Bestimmungsgleichung erhält

$$u_q(x) = (U_\infty + \bar{u}_q)\,J(x)$$

mit

$$J(x) = \frac{1}{t}\int_{x'=0}^{l} y_d'(x')\,\mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi}{t}\,(x - x')\right] dx' \,.$$

Dabei ist jetzt $J(x)$ nur von der Geometrie abhängig. Mit (9) läßt sich jetzt auch $\bar{u}_q$ durch den Mittelwert

$$\bar{J} = \frac{1}{l}\int_0^l J(x)\,dx \tag{10}$$

darstellen in der Form $u_q/U_\infty = \bar{J}/(1 - \bar{J})$. Damit erhält man für die induzierte Geschwindigkeit

$$\frac{u_q(x)}{U_\infty} = \frac{J(x)}{1 - \bar{J}} \,.$$

Für die numerische Auswertung ist es nun wieder zweckmäßig, das Integral in einen Anteil des Einzelflügels und des Restgitters $J(x) = J_E(x) + J_G(x)$ und $\bar{J} = J_E + \bar{J}_G$ zu zerlegen. Dann erhält man analog zu (3)

$$J_E(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x'=0}^{l} y_d'(x')\,\frac{dx'}{x - x'} \,, \tag{11a}$$

$$J_G(x) = \frac{1}{t}\int_{x'=0}^{l} y_d'(x')\left\{\mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi}{t}\,(x - x')\right] - \frac{t}{\pi\,(x - x')}\right\} dx' \,^2 \tag{11b}$$

---

[1] Beim gestaffelten Gitter entfällt diese Vereinfachung, da $u_{\gamma G} \neq 0$ und $v_{qG} \neq 0$, so daß sowohl y_d' wie auch y_s' von der Quell- und Zirkulationsverteilung abhängen.

[2] Bei der numerischen Auswertung stört die Unendlichkeitsstelle von y_d' bei $x' = 0$. Zieht man das wegen der Schließungsbedingung $\int_{x'=0}^{l} y_d'\,dx = 0$ verschwindende Integral $\int_{x'=0}^{l} y_d'(x')\left[\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,x}{t}\right) - \frac{t}{\pi\,x}\right] dx'$ ab, dann erhält man die für die numerische Auswertung von J_G geeignetere Form

$$J_G = \frac{1}{t}\int_{x'=0}^{l} y_d'(x')\left\{\mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi}{t}\,(x - x')\right] - \frac{t}{\pi\,(x - x')} - \left[\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi\,x}{t} - \frac{t}{\pi\,x}\right]\right\} dx' \,,$$

bei der für $x' = 0$ und $y_d' = \infty$ der Integrand verschwindet.

und $\bar{J}_E$ und $\bar{J}_G$ analog zu (10). Damit folgt dann aus der letzten Gleichung

$$\frac{u_{qG}(x)}{U_\infty} = \frac{J_G(x)}{1-\bar{J}}. \tag{12a}$$

Die Berechnung von u_{qE} erfordert noch eine besondere Überlegung: Bei der Geschwindigkeitsverteilung des Einzelflügels nach *F. Riegels* [1] wird in dem Ansatz für die Quellverteilung (8) die induzierte Geschwindigkeit u_{qE} vernachlässigt [2]. Damit die vorliegende Rechnung an die des Einzelflügels anschließt, muß bei der Ermittlung von u_{qE} aus der obigen Gleichung für u_q der Faktor $1/(1-\bar{J})$ durch den etwas kleineren Faktor $(1-\bar{J}_E)/(1-\bar{J})$ ersetzt werden. Damit erhält man

$$\frac{u_{qE}(x)}{U_\infty} = \frac{1-\bar{J}_E}{1-\bar{J}} J_E(x). \tag{12b}$$

Mit den induzierten Geschwindigkeiten dieser ersten Näherung läßt sich nun eine genauere Quellverteilung nach (8) ermitteln, womit dann nach (3) die induzierten Geschwindigkeiten in zweiter ausreichend genauer Näherung folgen. Bei den Beispielrechnungen erwies sich die Bestimmung einer zweiten Näherung nur bei der Teilung $t/l = 0{,}5$ zusammen mit einer Dicke von $d/l = 0{,}2$ als notwendig.

Die induzierte Geschwindigkeit v_γ folgt nach der kinematischen Strömungsbedingung (7b) aus der Skelettlinie zu

$$v_\gamma = (U_\infty + u_{qG})\, y_s' - V_\infty, \tag{13}$$

wenn man entsprechend dem Rechengang beim Einzelflügel u_{qE} gegen U_∞ vernachlässigt [2]. Die induzierte Geschwindigkeit u_{qG} ist nach der vorangegangenen Rechnung (12a) bekannt. Um nun die Geschwindigkeitsverteilung an der Kontur ermitteln zu können, muß die zu der induzierten Geschwindigkeit v_γ gehörige Zirkulationsverteilung ermittelt werden. Für die Bestimmung der Zirkulation bei vorgegebenem v_γ hat *N. Scholz* [3] eine Erweiterung des *Glauert*schen Ansatzes für das Einzelprofil auf das Schaufelgitter angegeben. Setzt man danach für die Zirkulationsverteilung

$$\gamma(x) = U_\infty \left[a_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} a_n \sin n\varphi \right] \tag{14}$$

mit

$$-\cos\varphi = \frac{\operatorname{\mathfrak{Tg}}\left[\frac{\pi}{t}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]}{\operatorname{\mathfrak{Tg}}\frac{\pi l}{2t}},$$

dann erhält man als induzierte Geschwindigkeit nach (2b)

$$v_\gamma = -U_\infty \left[\frac{a_0}{2} \operatorname{\mathfrak{Cot}}\left(\frac{\pi l}{2t}\right) - \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{a_n}{2} \cos n\varphi + \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty} \frac{a_n}{2} \operatorname{\mathfrak{Tg}}^n\left(\frac{\pi l}{4t}\right) \right]. \tag{15}$$

Mit $v_\gamma(x)$ aus (13) erhält man dann wie bei *Scholz* die Koeffizienten für die Zirkulationsverteilung nach (14) durch Quadratur zu

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{u_{qG}}{U_\infty}\right) y_s' \cos n\varphi \, d\varphi \qquad (n = 1, 2, 3\ldots), \\ a_0 &= -\frac{2}{\operatorname{\mathfrak{Cot}}\left(\frac{\pi l}{2t}\right)} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{u_{qG}}{U_\infty}\right) y_s' \, d\varphi - \frac{V_\infty}{U_\infty} + \frac{1}{2} \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty} a_n \operatorname{\mathfrak{Tg}}^n\left(\frac{\pi l}{4t}\right) \right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hier ist a_n nur von den geometrischen Daten abhängig, denn auch u_{qG} ist nach (12a) lediglich eine Funktion der Dickenverteilung und der Teilung. Der Koeffizient a_0 hängt noch zusätzlich von der Richtung der überlagerten Parallelströmung ab, so daß damit auch die Zuströmrichtung

[1] A. a. O.
[2] Siehe Fußnote 2 von S. 298.
[3] *N. Scholz*, Journal Aeron. Sciences 18 (1951), S. 637.

beliebig gewählt werden kann. Damit ist dann die Zirkulationsverteilung bestimmt. Die für die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung auf der Kontur interessierende induzierte Geschwindigkeit u_γ errechnet sich aus der Zirkulationsverteilung (4).

Da besonders bei enger Teilung die Reihe für die Zirkulationsverteilung nur langsam konvergiert, wird für die Beispielrechnung ein einfacheres Rechenverfahren verwandt, das aber nur für eine parabolische Skelettlinie verwendbar ist. Hierfür wird die Tatsache ausgenutzt, daß der durch eine elliptische Zirkulationsverteilung beim Einzelprofil erzeugte lineare Verlauf der induzierten Geschwindigkeiten $v_{\gamma E}$ auch im Gitter praktisch völlig erhalten bleibt, so daß bei einem ungestaffelten Gitter aus Parabelprofilen eine elliptische Zirkulationsverteilung vorliegt, deren Intensität von der Profilwölbung und der Gitterteilung abhängt [1].

c) Geschwindigkeitsverteilung. Mit den auf der Profilsehne ermittelten induzierten Geschwindigkeiten u_q und u_γ läßt sich jetzt nach (5) die Geschwindigkeit auf der Kontur bestimmen. Man erhält

$$w_K(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + y_K'^2}} \left| U_\infty + u_{qE} + u_{qG} \pm \frac{1}{2} U_\infty \left[a_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty} a_n \sin n\varphi \right] \right| . \qquad (17)$$

Wenn a_0 nicht verschwindet, tritt dabei für $x = 0$ wegen $y_K'(0) = \infty$ und $\operatorname{ctg} \varphi/2 = \infty$ eine Unbestimmtheit der Form ∞/∞ auf. Für den Grenzwert erhält man

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + y_K'^2}} = \sqrt{\frac{2\,l}{R_n}} \sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi\,l}{t}\right)}{\frac{\pi\,l}{t}}} ,$$

wobei R_N der Nasenhalbmesser des Profiles ist (Kontur in Nasennähe $y_K = \sqrt{2\,R_N\,x}$).

Zur Kontrolle des vorliegenden Verfahrens wurde ein Beispiel (Gitter mit $t/l = 0{,}5$ und $d/l = 0{,}2$) vergleichsweise auch auf Grund der konformen Abbildung nach *Weinig* [2] gerechnet. Dabei ergab sich eine recht gute Übereinstimmung beider Verfahren.

d) Stoßfreier Eintritt, Schaufelbelastung. Es läßt sich jetzt auch der im Strömungsmaschinenbau sehr geläufige Begriff des stoßfreien Eintritts mathematisch formulieren. Stoßfreier Eintritt liegt dann vor, wenn keine Umströmung der Vorderkante eintritt, $w_K(0) = 0$. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn in (17) $a_0 = 0$ ist. Dann läßt sich aus (16) auch die Richtung der überlagerten Parallelströmung bei stoßfreiem Eintritt (Index 0) ermitteln zu

$$\left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{u_{qG}}{U_\infty}\right) y_s'\, d\varphi + \frac{1}{2} \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty} a_n \mathfrak{Tg}^n \left(\frac{\pi\,l}{4\,t}\right) . \qquad (18)$$

Es ist $(V_\infty/U_\infty)_0$ also allein durch geometrische Angaben bestimmt. Hiermit läßt sich der Koeffizient a_0 nach (16) auch schreiben

$$a_0 = \frac{2}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right)} \left[\frac{V_\infty}{U_\infty} - \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_0 \right] . \qquad (19)$$

Für die weitere Betrachtung ist es zweckmäßig, auch die Gesamtzirkulation, die sich aus (14) nach *Scholz* [3] zu

$$\Gamma = \int_0^l \gamma(x)\, dx = t\, U_\infty \left[a_0\, \mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right) + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} a_n \mathfrak{Tg}^n \left(\frac{\pi\,l}{4\,t}\right) \right] \qquad (20)$$

ergibt, in einen Teil bei stoßfreier Anströmung (Index *o*) und einen Stoßanteil (Index β) aufzuspalten. Gleichzeitig soll für die Zirkulation ein dimensionsloser Beiwert eingeführt werden durch

$$c_u = \frac{2\,\Gamma}{l\,U_\infty} , \qquad (21)$$

[1] Die Beziehungen für die elliptische Zirkulationsverteilung sind in *L. Speidel*, Berechnung der Strömungsverluste von ungestaffelten ebenen Schaufelgittern, ungekürzte Dissertation Braunschweig 1953, angegeben.

[2] *F. Weinig*, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen, Leipzig 1935.

[3] Siehe Fußnote 3 von S. 300.

der mit Schaufelbelastung bezeichnet werden möge. Man kann diesen Beiwert auch als dimensionslosen Beiwert der Umfangskraft P_u bezeichnen, denn es ist wegen $P_u = \varrho\, U_\infty\, \Gamma$

$$c_u = \frac{P_u}{l\,\frac{\varrho}{2}\,U_\infty^2}.$$

Bei der Aufspaltung der Schaufelbelastung in Stoßanteil und Anteil bei stoßfreier Anströmung erhält man dann mit (21), (20) und (19)

$$\left.\begin{aligned} c_u &= c_{u0} + c_{u\beta}\,, \\ c_{u0} &= 2\,\frac{t}{l}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} a_n\,\mathfrak{Tg}^n\left(\frac{\pi\,l}{4\,t}\right), \\ c_{u\beta} &= 4\,\frac{t}{l}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right)\left[\frac{V_\infty}{U_\infty} - \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_0\right] \qquad [a_n \text{ nach (16)}]\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

e) Strömungsrichtung. Die Geschwindigkeitskomponente normal zur Gitterfront (x-Richtung) ist in großer Entfernung vor und hinter dem Gitter gleich U_∞; es ist also U_∞ beim ungestaffelten Gitter die Durchsatzgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Gitterfront setzt sich beim ungestaffelten Gitter aus der Translationsströmung V_∞ und der induzierten Geschwindigkeit v_∞ zusammen. Man erhält dann nach Abb. 2 (Index 1 vor dem Gitter, Index 2 hinter dem Gitter) für die Geschwindigkeiten parallel zur Gitterfront vor bzw. hinter dem Gitter

$$v_1 = V_\infty + v_\infty\,,$$
$$v_2 = V_\infty - v_\infty\,,$$

wobei v_∞ aus der Gesamtzirkulation einer Schaufel folgt zu

$$v_\infty = \frac{\Gamma}{2\,t}.$$

Damit ergibt sich dann die Zu- und Abströmrichtung zu

$$\operatorname{ctg}\beta_1 = -\frac{V_\infty}{U_\infty} - \frac{\Gamma}{2\,t\,U_\infty}\,,$$
$$\operatorname{ctg}\beta_2 = -\frac{V_\infty}{U_\infty} + \frac{\Gamma}{2\,t\,U_\infty}\,.$$

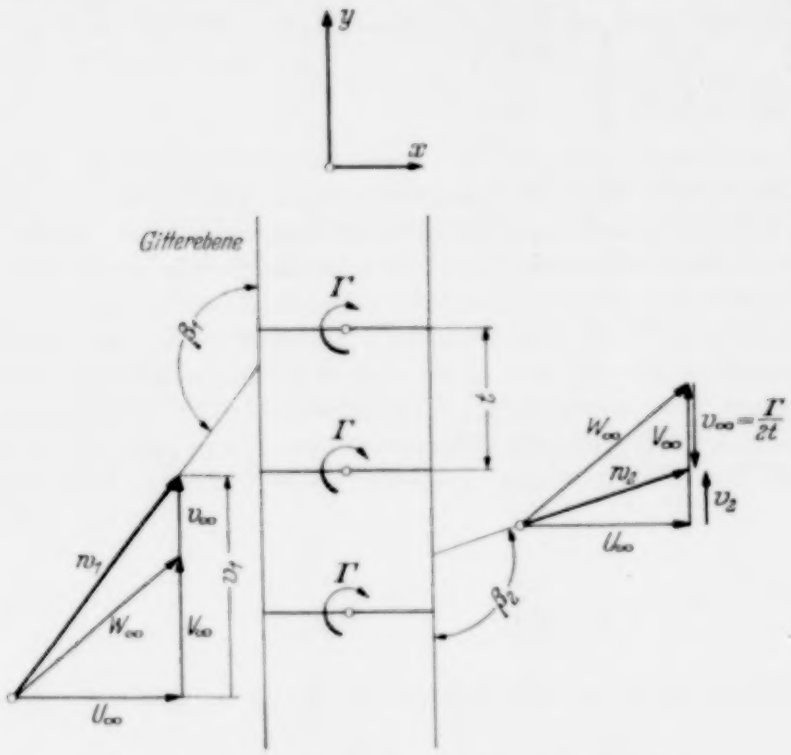


Abb. 2. Bestimmung des Zu- und Abströmwinkels in der Potentialströmung.

Mit V_∞/U_∞ aus (22) erhält man dann für die Strömungsrichtung

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}\beta_1 &= -\frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\left[c_{u\beta}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right) + c_u\right] - \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_0, \\ \operatorname{ctg}\beta_2 &= -\frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\left[c_{u\beta}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right) - c_u\right] - \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_0, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wobei noch die Zirkulation durch die Schaufelbelastung nach (21) ausgedrückt ist.

Damit sind alle in der Potentialströmung interessierenden Werte bestimmt.

3. Strömung mit Reibung. Die Berechnung der Strömung mit Reibung ist nicht, wie die der Potentialströmung, auf das ungestaffelte Gitter beschränkt, sondern auch auf jedes gestaffelte Gitter anwendbar.

a) Berechnung der Grenzschicht. Als erster Schritt muß nun die Grenzschicht nach einem bekannten Näherungsverfahren ermittelt werden. Dabei werden die Grenzschichtparameter

Impulsverlustdicke $\vartheta = \int_0^\infty \frac{w(n)}{w_K}\left(1 - \frac{w(n)}{w_K}\right) dn$ n Koordinate senkrecht zur Wand,

Verdrängungsdicke $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{w(n)}{w_K}\right) dn$ w Geschwindigkeit parallel zur Wand,

Energieverlustdicke $\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{w(n)}{w_K}\left[1 - \left(\frac{w(n)}{w_K}\right)^2\right] dn$ w_K Geschwindigkeit der Potentialströmung

bestimmt. Der Zahlenwert der Energieverlustdicke braucht jedoch nicht ermittelt zu werden; dieser Wert wird lediglich für die Ableitung der folgenden Beziehungen benötigt.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Grenzschicht als turbulent vom vorderen Staupunkt an betrachtet, einmal, weil sich der Umschlagspunkt kaum rechnerisch erfassen läßt, und zum anderen, weil infolge der starken Störungen in der Strömungsmaschine ein weit vorn liegender Umschlagspunkt zu erwarten ist. Für die Beispielrechnung wurde das Näherungsverfahren von *E. Gruschwitz*[1] verwandt, wobei die Impulsverlustdicke nach einer von *E. Truckenbrodt*[1] angegebenen Quadraturformel ermittelt wurde.

b) Änderung der Potentialströmung durch die Grenzschicht. Durch die Grenzschicht wird die reibungslose Außenströmung um das Profil verändert, indem das Profil durch die Verdrängungswirkung der Grenzschicht scheinbar verdickt wird. Eine zur Skelettlinie symmetrische Verdickung ergibt nur eine Änderung der Dickenverteilung, deren Einfluß auf die Potentialströmung nur beim gestaffelten Gitter von Bedeutung ist[2]. Bei unsymmetrischer Verdickung tritt eine zusätzliche Wölbung der Skelettlinie auf, wodurch die Gesamtzirkulation und damit die Strömungsrichtung vor und hinter dem Gitter geändert wird. Dieser Anteil soll jetzt ermittelt werden.

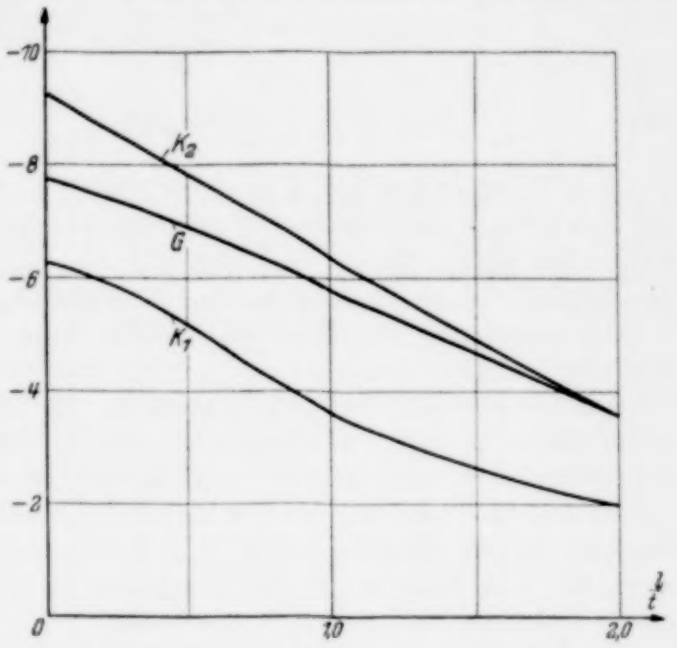


Abb. 3. Verlauf der Funktionen K_1, K_2 und G in Gl. (26).

Die Änderung der Skelettlinie durch die Verdrängungsdicke ist gegeben durch

$$\Delta y_s = \frac{1}{2}\left(\delta^*_{oben} - \delta^*_{unten}\right). \qquad (24)$$

Diese Änderung läßt sich beim ungestaffelten Gitter gut durch ein Polynom

$$\frac{\Delta y_s}{l} = C_1 \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{x}{l}\right)^6 \qquad (25)$$

annähern, wobei sich die Konstanten C_1 und C_2 für jede Grenzschicht leicht aus einer graphischen Auftragung $\Delta y_s(x)$ bestimmen lassen. Damit kann die Änderung der Potentialströmung universell bestimmt werden. Bei unveränderter Parallelströmung V_∞/U_∞ läßt sich für die Näherung der Gleichung (25) die Änderung der Schaufelbelastung nach (22) mit (16) und (18) errechnen und als lineare Funktion von C_1 und C_2 darstellen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \Delta c_{u\beta} &= \left(1 + \frac{\bar{u}_{qG}}{U_\infty}\right)\left[C_1 K_1\left(\frac{t}{l}\right) + C_2 K_2\left(\frac{t}{l}\right)\right], \\ \Delta c_{u0} &= \left(1 + \frac{\bar{u}_{qG}}{U_\infty}\right) C_2 G\left(\frac{t}{l}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

wobei die in Abb. 3 dargestellten Funktionen K_1, K_2 und G nur teilungsabhängig sind.

Mit der im Abschnitt I ermittelten Schaufelbelastung, die jetzt als ideale Schaufelbelastung (Index id) bezeichnet werden möge, ergibt sich dann mit der Änderung nach (26) die Schaufel-

[1] Siehe *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie, Karlsruhe 1951, S. 426 und S. 430.

[2] Beim ungestaffelten Gitter ergibt sich lediglich eine Erhöhung der Geschwindigkeit an der Profilkontur, die numerisch aber bedeutungslos ist.

belastung der reibungskorrigierten Potentialströmung (Index *korr*) zu

$$\left.\begin{aligned} (c_u)_{korr} &= (c_{u0})_{korr} + (c_{u\beta})_{korr} \\ \text{mit} \quad (c_{u0})_{korr} &= (c_{u0})_{id} + \Delta c_{u0}\,, \\ (c_{u\beta})_{korr} &= (c_{u\beta})_{id} + \Delta c_{u\beta}\,. \end{aligned}\right| \tag{27}$$

Bei den meisten praktischen Aufgaben ist nun die Schaufelbelastung der korrigierten Strömung gegeben. Die zugehörige Strömungsrichtung ließe sich nach (23) sofort hinschreiben, wenn man an Stelle der dort verwandten Werte der idealen Strömung lediglich die der korrigierten setzt. Dabei ist dann nur noch $(V_\infty/U_\infty)_{korr}$ durch bekannte Werte zu ersetzen. Aus der Bedingung, daß bei der Berechnung von Δc_{u0} die Strömungsrichtung V_∞/U_∞ unverändert bleibt, folgt aus (22) für $c_{u\beta\,id}$ und $c_{u\beta\,korr}$

$$\begin{gathered} \frac{V_\infty}{U_\infty} = \frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\,(c_{u\beta})_{id}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right) + \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_{0\,id} = \frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\,[(c_{u\beta})_{id} + \Delta c_{u\beta}]\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi\,l}{2\,t} + \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_{0\,korr} \\ \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_{0\,korr} = \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_{0\,id} - \frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\,\Delta c_{u\beta}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right). \end{gathered} \tag{28}$$

Damit folgt dann die Strömungsrichtung der reibungskorrigierten Potentialströmung mit dem nach (18) zu ermittelnden Wert von $(V_\infty/U_\infty)_{0\,id}$ zu

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}\beta_{1\,korr} &= -\frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\left[c_{u\beta\,korr}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right) + c_{u\,korr}\right] - \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_{0\,id} + \Delta\operatorname{ctg}\beta \\ \operatorname{ctg}\beta_{2\,korr} &= -\frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\left[c_{u\beta\,korr}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right) - c_{u\,korr}\right] - \left(\frac{V_\infty}{U_\infty}\right)_{0\,id} + \Delta\operatorname{ctg}\beta \\ \text{mit} \quad \Delta\operatorname{ctg}\beta &= \frac{1}{4}\,\frac{l}{t}\,\Delta c_{u\beta}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,l}{2\,t}\right). \end{aligned}\right| \tag{29}$$

c) Bestimmung der Verluste. α) Nicht abgelöste Grenzschicht. Mit der reibungskorrigierten Potentialströmung ist die verlustlose Strömung [1] weit hinter dem Gitter bekannt. Durch Vergleich mit den Werten der Strömung mit Reibung soll nun, wie in der Arbeit von *H. Schlichting* und *N. Scholz* [2], der Gitterverlust ermittelt werden.

Der durch die Reibung beeinflußte Bereich der Strömung, die Grenzschicht, ist bis zur Profilhinterkante verfolgt worden. Mit dem Impulssatz läßt sich dann aus der längs der Hinterkantenebene veränderlichen Strömung die ausgeglichene Strömung weit hinter dem Gitter bestimmen. Dabei soll dann noch die Kontraktion der Potentialströmung durch die Verdrängungsdicke der Grenzschicht berücksichtigt werden, die noch eine geringe Strömungsablenkung in Richtung zur Gitterfront verursacht. Bei der Anwendung des Impulssatzes ist die bei dicken Profilen längs der Hinterkantenebene veränderliche Potentialströmung unbequem. Um diese nicht erst ermitteln zu müssen, wird eine Ersatz-Potentialströmung eingeführt (Index *ers*), die in einer Ebene weit hinter dem Gitter (Index 2) mit der reibungskorrigierten Potentialströmung (Index *korr*) identisch ist, in der Hinterkantenebene (Index *H*) aber konstante Geschwindigkeitsverteilung aufweist (siehe Abb. 4). Nach dem Impulssatz ist für die Ersatzströmung weit hinter dem Gitter und in der Hinterkantenebene die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung gleich und damit dann auch der Druck gleich. Es ist dann zusammen mit der Definition der Ersatzströmung (Identität mit der korrigierten Potentialströmung weit hinter dem Gitter)

$$\left.\begin{aligned} (w_H)_{ers} &= (w_2)_{ers} = (w_2)_{korr}\,, \\ (p_H)_{ers} &= (p_2)_{ers} = (p_2)_{korr}\,, \\ (\beta_H)_{ers} &= (\beta_2)_{ers} = (\beta_2)_{korr}\,. \end{aligned}\right| \tag{30}$$

Die potentialtheoretische Ersatzströmung in der Hinterkantenebene entspricht also der reibungskorrigierten Potentialströmung weit hinter dem Gitter.

Für die zur Ersatzströmung gehörige Grenzschicht wird nun im Vergleich zu der zur reibungskorrigierten Potentialströmung gehörigen angenommen, daß sie

[1] Bei der im vorigen Abschnitt betrachteten reibungskorrigierten Potentialströmung ist lediglich die Konturänderung durch die Grenzschicht berücksichtigt worden. Die Strömung selbst ist reibungslos.

[2] Siehe Fußnote 1 von S. 295.

1. den gleichen Energieverlust aufweist (da der gesamte Energieverlust der Strömung nur in der Grenzschicht auftritt) und

2. die gleiche Geschwindigkeitsverteilung, also die gleichen Formparameter $H = \delta^*/\vartheta$ und $H_1 = \delta^{**}/\vartheta$ besitzt.

Aus der ersten Bedingung folgt dann:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \varrho\, \delta^{**}_{H\,ers}\, w^3_{H\,ers} \\ &= \varrho\, \delta^{**}_{H\,korr}\, w^3_{H\,korr} \end{aligned} \qquad (31)$$

und damit zusammen mit der zweiten Bedingung und (30)

$$\begin{aligned} \frac{\delta^{**}_{H\,ers}}{\delta^{**}_{H\,korr}} &= \frac{\vartheta_{H\,ers}}{\vartheta_{H\,korr}} = \frac{\delta^{*}_{H\,ers}}{\delta^{*}_{H\,korr}} \\ &= \frac{w^3_{H\,korr}}{w^3_{H\,ers}} = \left(\frac{w_H}{w_2}\right)^3_{korr} . \end{aligned} \qquad (32)$$

Damit lassen sich dann die Grenzschichtparameter der Ersatzströmung ermitteln. Eine besondere Vereinfachung ergibt sich dabei bei der Bestimmung der Impulsverlustdicke der Ersatzströmung. Bei der Berechnung der Impulsverlustdicke nach der von *E. Truckenbrodt* angegebenen Quadraturformel [1],

$$\frac{\vartheta_H}{l} = \frac{0{,}037}{\sqrt[5]{\frac{U_\infty\, l}{\nu}\left(\frac{w_H}{U_\infty}\right)^{3{,}4}}} \left[\int_0^1 \left(\frac{w_K}{U_\infty}\right)^4 d\,\frac{s}{l}\right]^{0{,}8} \qquad (33)$$

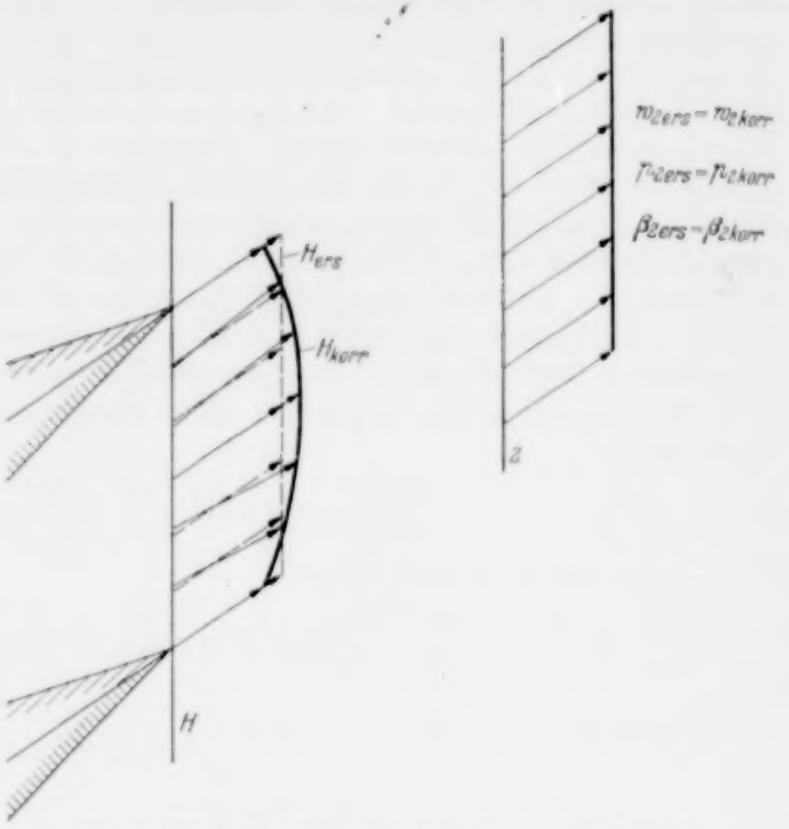


Abb. 4. Potentialtheoretische Ersatzströmung (schematisch); ——— korrigierte Potentialströmung (Index korr), - - - - Ersatzströmung (Index *ers*), Hinterkantenebene (Index *H*): $w_{H\,korr}$, $\gamma_{H\,korr}$, $\beta_{H\,korr}$ längs der Hinterkantenebene veränderlich; $w_{H\,ers}$, $\gamma_{H\,ers}$, $\beta_{H\,ers}$ längs der Hinterkante konstant; Ebene 2, weit hinter dem Gitter: korrigierte Potentialströmung und Ersatzströmung identisch.

bereitet die Ermittlung der Geschwindigkeit an der Profilhinterkante in der reibungskorrigierten Potentialströmung erhebliche Schwierigkeiten. Bei der Bestimmung der Impulsverlustdicke der Ersatzströmung nach (32) fällt aber diese schwierig zu bestimmende Geschwindigkeit heraus, da man in guter Näherung setzen kann $(w_H/U_\infty)^{3,4} \approx (w_H/U_\infty)^3$, so daß man erhält:

$$\left(\frac{\vartheta_H}{l}\right)_{ers} = \left(\frac{\vartheta_H}{l}\right)_{korr}\left(\frac{w_H}{w_2}\right)^3_{korr} = \frac{0{,}037}{\sqrt[5]{\frac{U_\infty\, l}{\nu}}}\left(\frac{U_\infty}{w_2}\right)^{3{,}4}_{korr}\left[\int_0^1 \left(\frac{w_K}{U_\infty}\right)^4 d\,\frac{s}{l}\right]^{0{,}8} . \qquad (34)$$

Damit ist in der Hinterkantenebene eine Ersatzströmung beschrieben, die sich aus einer Potentialströmung mit konstanter Geschwindigkeitsverteilung und der zugehörigen Grenzschicht zusammensetzt. Bei der Berechnung von Schaufelgittern aus unendlich dünnen Profilen nach *H. Schlichting* und *N. Scholz* trat die gleiche Geschwindigkeitsverteilung in der Hinterkantenebene auf, und zwar entsprechen sich die in Tabelle 1 gegenübergestellten Größen. Die folgen-

Tabelle 1. *Gegenüberstellung der in der Ersatzströmung der vorliegenden Arbeit und der in der Arbeit von H. Schlichting und N. Scholz in der Hinterkantenebene auftretenden Größen.*

	Rechnung nach *H. Schlichting* und *N. Scholz*	Ersatzströmung vorliegende Arbeit
Potentialströmung	$w_{2\,id}$, $p_{2\,id}$, $\beta_{2\,id}$	$w_{H\,ers}$, $p_{H\,ers}$, $\beta_{H\,ers}$
Grenzschicht	ϑ_H, δ^*_H	$\vartheta_{H\,ers}$, $\delta^*_{H\,ers}$

[1] In der kürzlich von *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 211, veröffentlichten Grenzschichtarbeit weichen die Exponenten von denen der in *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie S. 430 angegebenen Gleichung (33) geringfügig ab, wodurch aber die Gesamtergebnisse praktisch nicht beeinflußt werden.

den Formeln für die aerodynamischen Beiwerte, welche aus dem Vergleich der Strömung mit Reibung mit der reibungslosen Strömung folgen, können dann unmittelbar aus der Arbeit von *H. Schlichtung* und *N. Scholz* übernommen werden. Bei der Darstellung der Ergebnisse werden wie dort die Abkürzungen verwandt

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{\vartheta_{H\,ers\,oben} + \vartheta_{H\,ers\,unten}}{t \sin \beta_{2\,korr}}, \\ \Delta^* &= \frac{\delta^*_{H\,ers\,oben} + \delta^*_{H\,ers\,unten}}{t \sin \beta_{2\,korr}}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Da Θ und Δ^* sehr klein gegen 1 sind, ist es bei den bisherigen Vernachlässigungen wenig sinnvoll, noch Glieder höherer Ordnung von Θ und Δ^* zu berücksichtigen. Entwickelt man die Ergebnisse von *Schlichting* und *Scholz* [in (36) bis (38) in $\{\ \}$ angegeben] nach Potenzen von Θ und Δ^* [1], dann erhält man unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung für die aerodynamischen Beiwerte des Gitters folgende Ergebnisse:

1. Richtungsänderung gegenüber der korrigierten Potentialströmung [*Schlichting* und *Scholz* (40)]:

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta_2}{\operatorname{ctg} \beta_{2\,korr}} = \chi = \left[\frac{1 - \Theta - \Delta^*}{(1 - \Delta^*)^2}\right] \approx 1 + \Delta^* - \Theta\,. \tag{36}$$

2. Druckverlust [ebenda (41)]:

$$\frac{\Delta p_V}{q_{2\,korr}} = \left[\frac{2\,\Delta^* - \Delta^{*2}}{(1 - \Delta^*)^2} - 2\,(\chi - 1)\sin^2 \beta_{2\,korr}\right] \approx 2\,(\Delta^* \cos^2 \beta_{2\,korr} - \Theta \sin^2 \beta_{2\,korr}) \tag{37}$$

3. Gitterverlustbeiwert, definiert als $\zeta_V = \dfrac{\Delta g}{g_1 - p_2} = \dfrac{\Delta g}{\frac{\varrho}{2} w^2_{2\,id}}$ [ebenda (43)]:

$$\zeta_V = \frac{\Delta g}{q_{2\,korr}\left(1 - \dfrac{\Delta p_V}{q_{2\,korr}}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{\Delta p_V}{q_{2\,korr}}}\left[\frac{2\,\Delta^* - \Delta^{*2}}{(1 - \Delta^*)^2} - 2\,(\chi - 1)\sin^2 \beta_{2\,korr} - (\chi^2 - 1)\cos^2 \beta_{2\,korr})\right]$$
$$\approx 2\,\Theta. \tag{38}$$ [2]

β) Abgelöste Grenzschicht. Für die Bestimmung der Strömung hinter dem Ablösungspunkt der Grenzschicht liegen noch keine Rechenverfahren vor, da in diesem Bereich das physikalische Verhalten der Grenzschicht noch weitgehend ungeklärt ist. Während beim Einzelflügel die Strömung mit Ablösung wenig interessiert, da dieser Zustand möglichst vermieden wird, wird er beim Gitter praktisch gebraucht, da, wie sich noch zeigen wird, die günstigsten Anordnungen hier bei teilweise abgelöster Grenzschicht vorliegen. Es ist deshalb

[1] Man kann dabei in erster Näherung setzen

$$\frac{1}{(1 - \Delta^*)^2} \approx 1 + 2\,\Delta^*.$$

[2] Führt man den Grenzübergang $t/l \to \infty$ durch, dann erhält man hieraus leicht den Widerstandsbeiwert des Einzelprofiles $c_w = W \Big/ \frac{\varrho}{2} U^2_\infty l$. Dieser hängt mit dem Verlustbeiwert nach *Schlichting* und *Scholz* Gl. (50) zusammen durch

$$c_w = \zeta_V \frac{l}{t} \sin^3 \beta_\infty\,.$$

Mit (38) und (34) erhält man dann beim Grenzübergang $t/l \to \infty$ und $\beta_\infty = \frac{\pi}{2}$ den Widerstandsbeiwert einer Profilseite zu

$$c_w = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\dfrac{U_\infty\, l}{\nu}}} \left\{ \int_{x_u/l}^{1} \left(\frac{w_K}{U_\infty}\right)^4 d\,\frac{x}{l} + C \right\}^{0{,}8},$$

wobei die Konstante

$$C = \frac{1}{0{,}0160}\left(\frac{\vartheta_u}{l}\right)^{5/4}\left(\frac{U_\infty\, l}{\nu}\right)^{1/4}\left(\frac{w_{Ku}}{U_\infty}\right)^{4{,}25}$$

den laminaren Anlauf der Grenzschicht bis zur Umschlagstelle x_u erfaßt (ϑ_u Impulsverlustdicke und w_{Ku} Geschwindigkeit an der Umschlagstelle). Für die Gitterrechnungen war wegen der Turbulenz der Zuströmung $x_u = 0$ gesetzt worden.

erforderlich, die Verluste bei abgelöster Strömung abzuschätzen. Zu diesem Zweck werden zunächst die durch die Ablösung auf das Profil ausgeübten Kräfte abgeschätzt. Dafür wird angenommen, daß sich die Umströmung des Profilvorderteiles bei mäßiger Ablösung nicht ändert, eine Annahme, die berechtigt erscheint, da selbst beim Kreiszylinder mit sehr großem Ablösegebiet der Unterschied zwischen der potentialtheoretischen und der gemessenen Druckverteilung im Vorderteil gering ist. Weiter wird für den Bereich abgelöster Strömung, in Übereinstimmung mit Messungen, angenommen, daß dort konstanter Druck herrscht, der mit dem aus der Potentialströmung am Ablösungspunkt errechneten übereinstimmt. Mit dieser Druckänderung auf der Profilseite, an der die Grenzschichtablösung auftritt, ist auch eine Druckänderung auf der gegenüberliegenden Profilseite verbunden, da an der Hinterkante auf beiden Seiten der gleiche Druck herrschen muß, wenn keine Umströmung stattfinden soll. Für die der Ablösung gegenüberliegende Seite wird in grober Näherung der in Abbild. 5 dargestellte Druckverlauf angenommen. Dieser soll linear vom Ablösedruck an der Profilhinterkante zu dem Druck der Potentialströmung an der dem Ablösungspunkt gegenüberliegenden Stelle verlaufen.

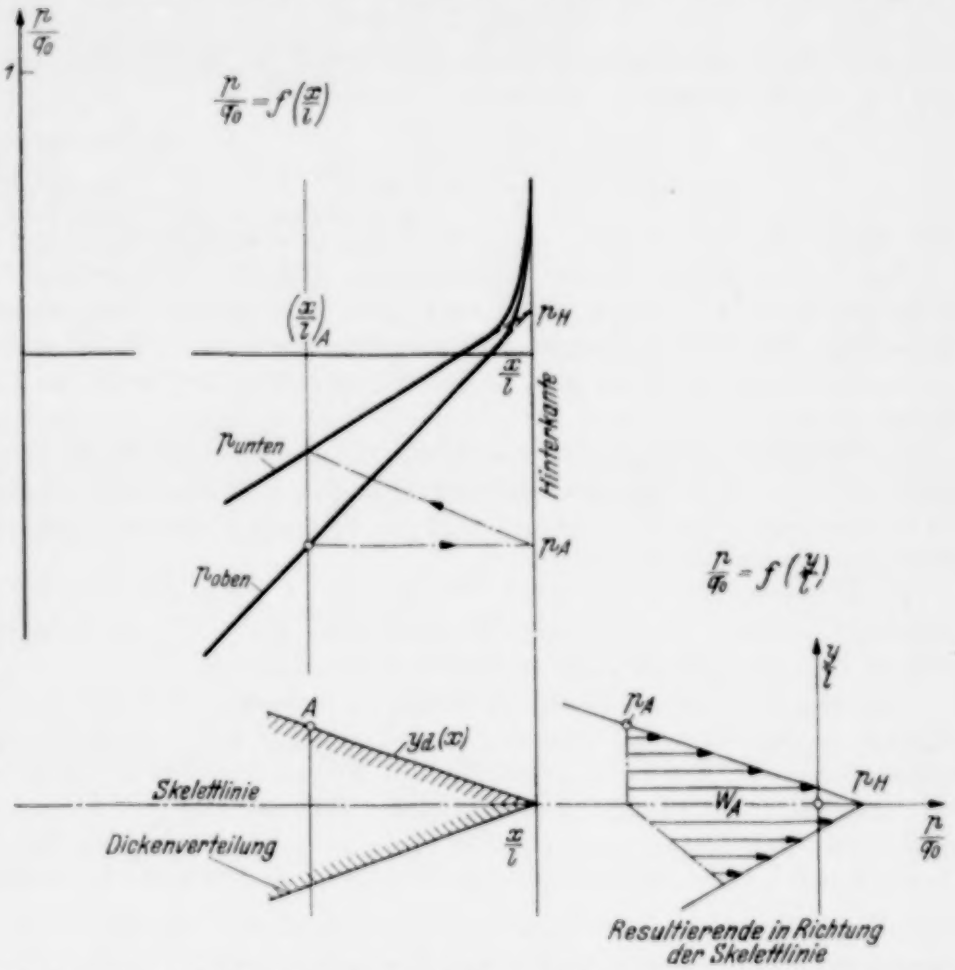


Abb. 5. Druckverteilung bei Ablösung der Grenzschicht. Der Rechnung zugrunde gelegter Verlauf; ——— Potentialströmung, · · · · reibungskorrigierte Potentialströmung, - - - - - abgelöste Strömung.

Der zusätzliche Widerstand durch die Ablösung der Grenzschicht ist dann durch die Differenz zwischen der angenommenen Druckverteilung bei abgelöster Strömung und der der reibungskorrigierten Potentialströmung gegeben. Nimmt man zur Vereinfachung der Rechnung noch an, daß Kontur und Druckverteilung der reibungskorrigierten Potentialströmung im Ablösebereich linear verlaufen, dann sind die zusätzlichen Kräfte auf Ober- und Unterseite gleich, wie Abb. 5 zeigt; die durch die Grenzschichtablösung hervorgerufene resultierende Zusatzkraft verläuft dann in Richtung der Tangente an die Skelettlinie. Der zusätzliche Widerstand ist dann nach Abb. 5

$$W_A = y_{dA}\,(p_H - p_A) = \frac{\varrho}{2}\, y_{dA}\,(w_A^2 - w_H^2)\,,$$

wobei noch die Drücke durch die Geschwindigkeiten ersetzt sind. Diese Kraft soll noch durch eine aequivalente Impulsverlustdicke ausgedrückt werden, um den Ablösungswiderstand in das vorliegende Rechenschema einordnen zu können. Da der zusätzliche Widerstand durch die Grenzschichtablösung in Richtung der Skelettlinie verläuft, die ungefähr der Richtung von w_2 entspricht, kann man mit der Genauigkeit der übrigen Annahmen diese Kraft durch die Impulsverlustdicke ϑ_A ausdrücken als

$$W_A = \varrho\, \vartheta_A\, w_{2korr}^2\,,$$

und man erhält die zusätzliche Impulsverlustdicke, die durch die Ablösung hervorgerufen wird, abgeschätzt zu

$$\frac{\vartheta_A}{l} = \frac{1}{2}\,\frac{y_{dA}}{l}\left[\left(\frac{w_A}{w_{2\,korr}}\right)^2 - \left(\frac{w_H}{w_{2\,korr}}\right)^2\right]. \tag{39}$$

Damit erhält dann die Abkürzung Θ nach (35) im Falle abgelöster Grenzschicht die Form

$$\Theta = \frac{\vartheta_{H\,ers\,oben} + \vartheta_{H\,ers\,unten} + \vartheta_A}{t \sin \beta_{2\,korr}} . \tag{40}$$

Für die Abkürzung Δ^* muß nun noch die Summe der Verdrängungsdicken bei abgelöster Strömung bestimmt werden. Hierfür wird angenommen, daß die in (25) aufgestellte Näherung für den Verlauf der Verdrängungsdicken auch noch im abgelösten Gebiet gültig ist, so daß diese Beziehung zur Extralopation verwandt werden kann [1]. Durch Hinzufügen von $2\,(\delta_H^*/l)_{unten}$ auf beiden Seiten erhält man dann aus (24) und (25) die Summe der Verdrängungsdicken an der Hinterkante zu

$$\left(\frac{\delta_H^*}{l}\right)_{oben} + \left(\frac{\delta_H^*}{l}\right)_{unten} = 2\left[C_1 + C_2 + \left(\frac{\delta_H^*}{l}\right)_{unten}\right].$$

Mit (32) erhält man dann den zugehörigen Wert der Ersatzströmung, so daß die Abkürzung Δ^* bei abgelöster Grenzschicht die Form erhält

$$\Delta^* = \frac{l}{t}\,\frac{2}{\sin \beta_{2\,korr}}\left[C_1 + C_2 + \left(\frac{\delta_H^*}{l}\right)_{unten}\right]\left(\frac{w_H}{w_2}\right)^3_{korr} . \tag{41}$$

Mit (40) und (41) ist dann der Einfluß der Grenzschichtablösung abgeschätzt.

Zur Überprüfung dieser Abschätzung sind die Widerstandsbeiwerte der symmetrischen Einzelprofile NACA 0010, 0015 und 0020 mit diesen Beziehungen gerechnet und mit den Messungen des NACA Reports 460 verglichen worden. Die Übereinstimmung der Polaren und des Auftriebsanstieges ist gut, so daß die Abschätzung auch im Gitter brauchbare Ergebnisse liefern dürfte.

Im Hinblick darauf, daß im Gitter die Bestpunkte im Bereich geringer Grenzschichtablösung liegen, ist es dringend erforderlich, das Verhalten der abgelösten Grenzschicht genauer zu untersuchen, so daß man an Stelle dieser groben Abschätzung physikalisch besser fundierte Beziehungen setzen kann.

d) Umrechnung auf andere *Reynoldszahlen*. Zur allgemeinen Verwendung müssen die für eine *Reynolds*zahl $Re = U_\infty\, l/\nu$ errechneten Ergebnisse auch auf andere *Reynolds*zahlen umgerechnet werden können.

Die von der *Reynolds*zahl abhängigen Beiwerte (36) bis (38) Gitterverlust, Druckverlust gegenüber der Potentialströmung und Änderung der Schaufelbelastung sind sämtlich proportional ϑ und δ^*. Da im Bereich der bei Strömungsmaschinen gebräuchlichen *Reynolds*zahlen von etwa $Re = 10^5$ bis 10^7 der Verlauf des Formparameters $H = \delta^*/\vartheta$ längs der Schaufelkontur praktisch unabhängig von der *Reynolds*zahl ist, können alle *Re*-Zahl abhängigen Werte auch als zu ϑ allein proportional angesehen werden. Im Falle nicht abgelöster Grenzschicht ist nach (33) ϑ umgekehrt proportional zu $\sqrt[5]{Re}$, so daß man für die Umrechnung von dem bekannten Ausgangszustand (Index a) auf den der vorliegenden *Re*-Zahl (Index b) die Beziehung erhält

$$\frac{\vartheta_b}{\vartheta_a} = \sqrt[5]{\frac{Re_a}{Re_b}} .$$

Damit ist dann aber auch für alle *Re*-Zahl abhängigen Größen die gleiche Umrechnung gegeben und man erhält

$$\frac{\zeta_{V\,b}}{\zeta_{V\,a}} = \frac{\Delta p_{V\,b}}{\Delta p_{V\,a}} = \frac{\Delta c_{w\,b}}{\Delta c_{w\,a}} = \frac{\vartheta_b}{\vartheta_a} = \sqrt[5]{\frac{Re_a}{Re_b}} . \tag{42}$$

Liegt Ablösung vor, dann ändert sich auch der Ablösungspunkt, der sich mit wachsender *Re*-Zahl nach hinten verschiebt, so daß der Ablösungswiderstand absinkt. Im Bereich geringer Ablösung ist es zulässig, diese Änderung ebenfalls umgekehrt proportional $\sqrt[5]{Re}$ zu betrachten, so daß auch im Bereich geringer Ablösung (42) gültig bleibt.

e) Rechnungsgang. In einer kurzen Übersicht soll abschließend der Gang der Rechnung bei einem ungestaffelten Schaufelgitter gezeigt werden. Dabei sei vorgegeben:

1. Schaufelprofil durch Wölbungsverteilung $y_s(x)$ und Dickenverteilung $y_d(x)$,

[1] Eine verbleibende Unsicherheit von Δ^* ist in den Endergebnissen von untergeordneter Bedeutung. Die Änderung des Abströmwinkels β_2 in (36) wird wenig beeinflußt, da $\Delta^* \ll 1$ ist. Der Druckverlust (37) wird durch diese Unsicherheit nicht beeinflußt, da bei den vorliegenden Fällen des ungestaffelten Gitters $\cos \beta_2 < \sin \beta_2$ ist. Im Energieverlust (38) tritt Δ^* nicht auf.

2. Gitteranordnung, beim ungestaffelten Gitter durch die Teilung t/l beschrieben,

3. Festlegung der Zu- und Abströmrichtung durch die zusätzliche Schaufelbelastung durch Stoß $c_{u\beta\,korr}$.

Dann ergibt sich der Rechnungsgang folgendermaßen:

	Rechenschritt	Ergebnis	Gl. Nr.
1	Schaufelbelastung stoßfrei in der Potentialströmung	$c_{u\,0\,id}$	(22) (16) (12a)
2	Überlagerte Parallelströmung, stoßfrei	$(V_\infty/U_\infty)_{0\,id}$	(18)
3	Geschwindigkeitsverteilung	w_K/U_∞	(17)
4	Mittlere induzierte Geschwindigkeit	$\bar{u}_{qG}$	(9) (12a)
5	Grenzschichtrechnung	ϑ, δ^*	(33)
6	Korrektur durch Verdrängungswirkung. Aus δ^*/l wird Δy_s bestimmt, und durch (25) graphisch angenähert. Daraus dann die Koeffizienten C_1 und C_2	C_1, C_2	(25)
7	Änderung der Schaufelbelastung	Δc_{u_0}, $\Delta c_{u\,\beta}$	(26)
8	Wirkliche Schaufelbelastung	$c_{u\,korr}$	(27)
9	Strömungsrichtung in korrigierter Potentialströmung	$(\mathrm{ctg}\,\beta_{1\infty 2})$	(29)
10	Impulsverlustdicke der Ersatzströmung und der abgelösten Strömung	$\vartheta_{H\,ers}$, ϑ_A	(34), (39)
11	Substitutionen	Θ, Λ^*	(40), (41)
12	Gitterverlust, Druckverlust, Richtungsänderung	ζ_V, Δp_V, χ	(36), (37), (38)

4. Systematische Rechnungen an ungestaffelten Gittern[1]. a) Rechenprogramm. Um beim ungestaffelten Gitter (Schaufelwinkel $\beta_s = 90°$) einen Einblick in den Einfluß der geometrischen Parameter Dicke, Wölbung und Teilung zu erhalten, wurden die in Abb. 6 zu-

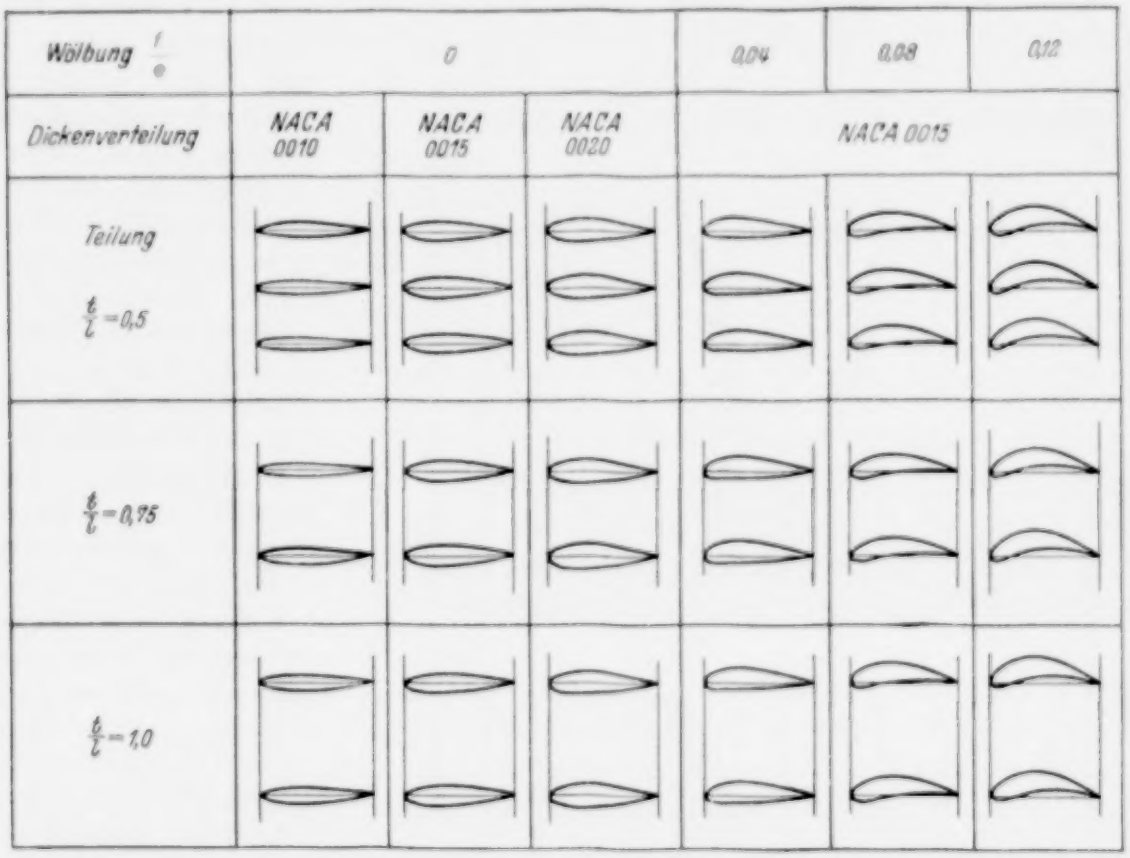


Abb. 6. Gerechnete Gitteranordnungen; $Re = U_\infty l/\nu = 10^6$; Anströmrichtung verändert bis Grenzschicht in den hinteren 20% der Profiltiefe abgelöst.

sammengestellten Anordnungen gerechnet. Die Profile sind dabei aufgebaut aus einer parabolischen Skelettlinie mit einer Wölbungsrücklage von 50% und der Dickenverteilung des

[1] Einige Teilergebnisse der nachstehenden Beispielrechnungen wurden bereits mitgeteilt in einem zusammenfassenden Bericht von *H. Schlichting*, Z. f. Flugwissensch. 1 (1953), S. 109 und Journ. Aeron. Sciences 21 (1954) S. 163.

NACA-Tropfens mit einer Dickenrücklage von 30%. Die Zuströmung wurde in allen Fällen soweit geändert, bis die Grenzschicht in den hinteren 20% der Profiltiefe ablöste. Die Rechnung hatte im Einzelnen folgende Ergebnisse:

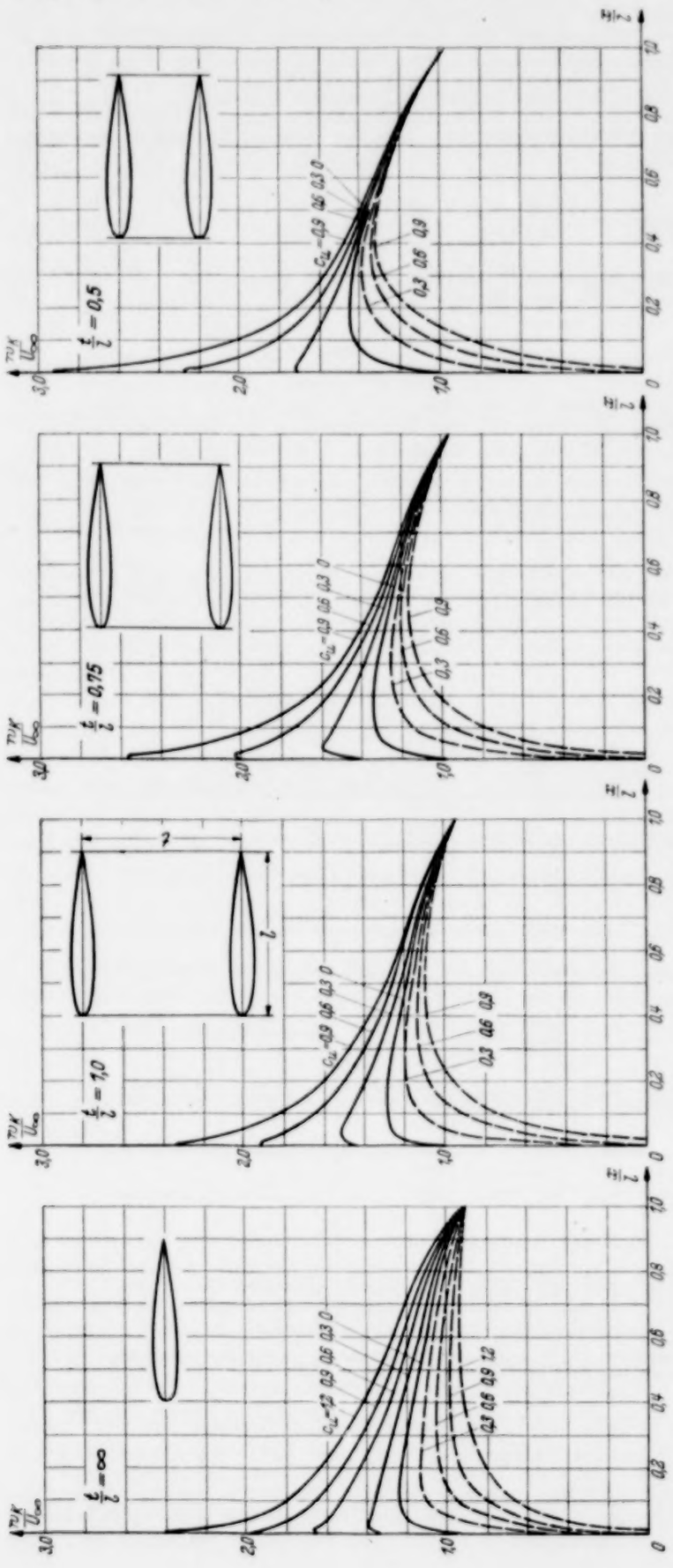


Abb. 7. Einfluß der Teilung auf die Geschwindigkeitsverteilung eines symmetrischen Profiles NACA 0015 im Gitter.

b) Geschwindigkeitsverteilung.

α) Symmetrische Profile: Die Veränderung der Geschwindigkeitsverteilung mit der Gitterteilung t/l ist in Abb. 7 für das symmetrische Profil NACA 0015 dargestellt. Die bekannte Geschwindigkeitsverteilung des Einzelprofiles wird durch Verengung der Teilung bei $c_u = 0$ wie bei einer Profilverdickung verändert, d. h. das Geschwindigkeitsmaximum steigt leicht an. Bei belasteten Profilen $c_u \neq 0$, wird die an der Profilnase auftretende Saugspitze mit Verengung der Teilung stark vergrößert, während gleichzeitig die Belastung des hinteren Profilteiles abgebaut wird.

Die Veränderung der Geschwindigkeitsverteilung mit der Dicke ist in Abb. 8 für das symmetrische Profil bei der Teilung $t/l = 0{,}75$ dargestellt. Bei unbelasteter Schaufel steigt das Geschwindigkeitsmaximum bei etwa $x/l = 0{,}2$ leicht an. Die bei belasteter Schaufel an der Profilnase auftretende Saugspitze wird mit zunehmender Dicke anfangs abgebaut, bis nachher bei großen Dicken die Saugspitze etwa konstant bleibt. [Anteil u_η in (17) wächst dann etwa so stark, wie $\frac{a_0 \operatorname{ctg} \eta/2}{\sqrt{1 + y_d'^2}}$ mit der Dicke abnimmt].

β) Gewölbte Profile: Der Einfluß der Wölbung auf die Geschwindigkeitsverteilung ist in Abb. 9 für das 15% dicke Profil bei der Teilung $t/l = 0{,}75$ dargestellt. Die Schaufelbelastung bei stoßfreiem Eintritt steigt linear

mit der Wölbung an. Das Geschwindigkeitsmaximum auf der Saugseite verlagert sich für diesen Fall mit steigender Wölbung leicht nach hinten. Die Geschwindigkeitsverteilung bei Anströmung mit Stoß erhält man dann durch zusätzliche Überlagerung der Geschwindigkeitsverteilung des symmetrischen unendlich dünnen Profiles (s. Abb. 8).

Der Einfluß der Gitterteilung ist in Abb. 10 an einem Profil mit 8% Wölbung zu ersehen. Die Schaufelbelastung bei stoßfreiem Eintritt nimmt mit Verringerung der Teilung recht erheblich ab, so daß zur Aufrechterhaltung der gleichen Schaufelbelastung ein stärkerer Stoß als bei weiterer Teilung überlagert werden muß. Dadurch wächst dann die Saugspitze bei einem gewölbten Profil mit Verringerung der Teilung wesentlich stärker als bei einem symmetrischen Profil an.

c) Gitterverlustbeiwerte. Die Gitterverlustbeiwerte sind in Abb. 11 für symmetrische Profile bei verschiedener Dicke und in Abb. 12 für gewölbte Profile der Dicke $d/l = 0{,}15$ bei verschiedener Wölbung aufgetragen. Im Hinblick auf den späteren Vergleich der Gitter untereinander ist als unabhängige Veränderliche die Gitterumlenkung gewählt worden, die definiert ist als Differenz der Umfangskomponenten von Zu- und Abströmrichtung $\Delta w_u = w_{2u} - w_{1u}$ mit der Durchsatzgeschwindigkeit U_∞ dimensionslos gemacht, somit $\Delta w_u / U_\infty$. Die Gitterumlenkung ist also ein Maß für die Wirkung eines Schaufelgitters. Der Zusammenhang mit der Zirkulation und der Schaufelbelastung ist dann nach (29) und (21) gegeben durch

$$\frac{\Delta w_u}{U_\infty} = \operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\beta_1 = \frac{\Gamma}{t\,U_\infty} = \frac{c_u}{2}\,\frac{l}{t}. \qquad (43)$$

Die Verlustbeiwerte der sym-

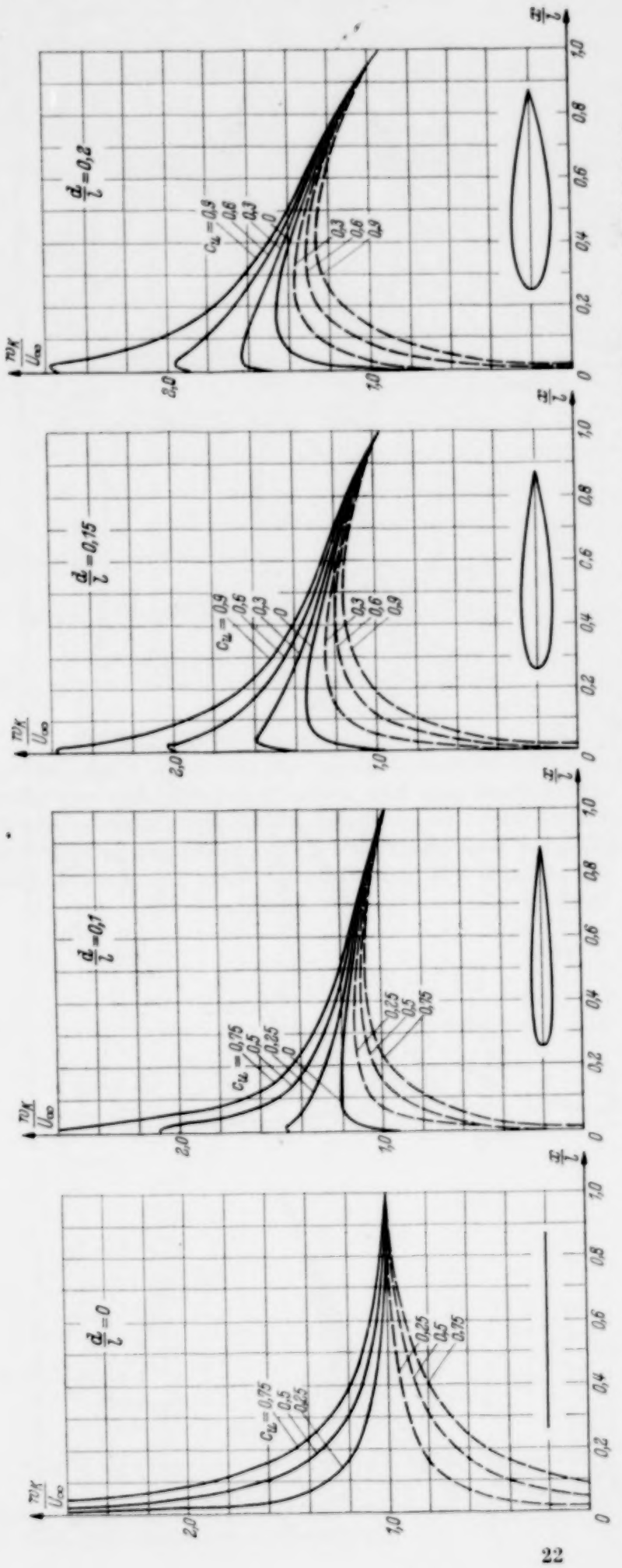


Abb. 8. Einfluß der Profildicke auf die Geschwindigkeitsverteilung eines symmetrischen Profiles bei der Teilung $t/l = 0{,}75$. Dickenverteilung des NACA-Tropfens.

metrischen Profile (Abb. 11) sind zur Gitterumlenkung Null symmetrisch. Bei weiter Teilung ist der Absolutwert des Verlustes gering, steigt aber schon bei verhältnismäßig geringer Gitterumlenkung stark an. Bei enger Teilung liegt der Punkt starken Druckanstieges bei wesentlich größerer Gitterumlenkung, das Gitter ruft also eine viel stärkere Wirkung hervor, dafür sind aber wegen der höheren Schaufelzahl die Verluste auch bei geringer Gitterumlenkung größer. Mit wachsender Profildicke werden die Kurven sämtlich in Richtung höherer Verlustbeiwerte verlagert.

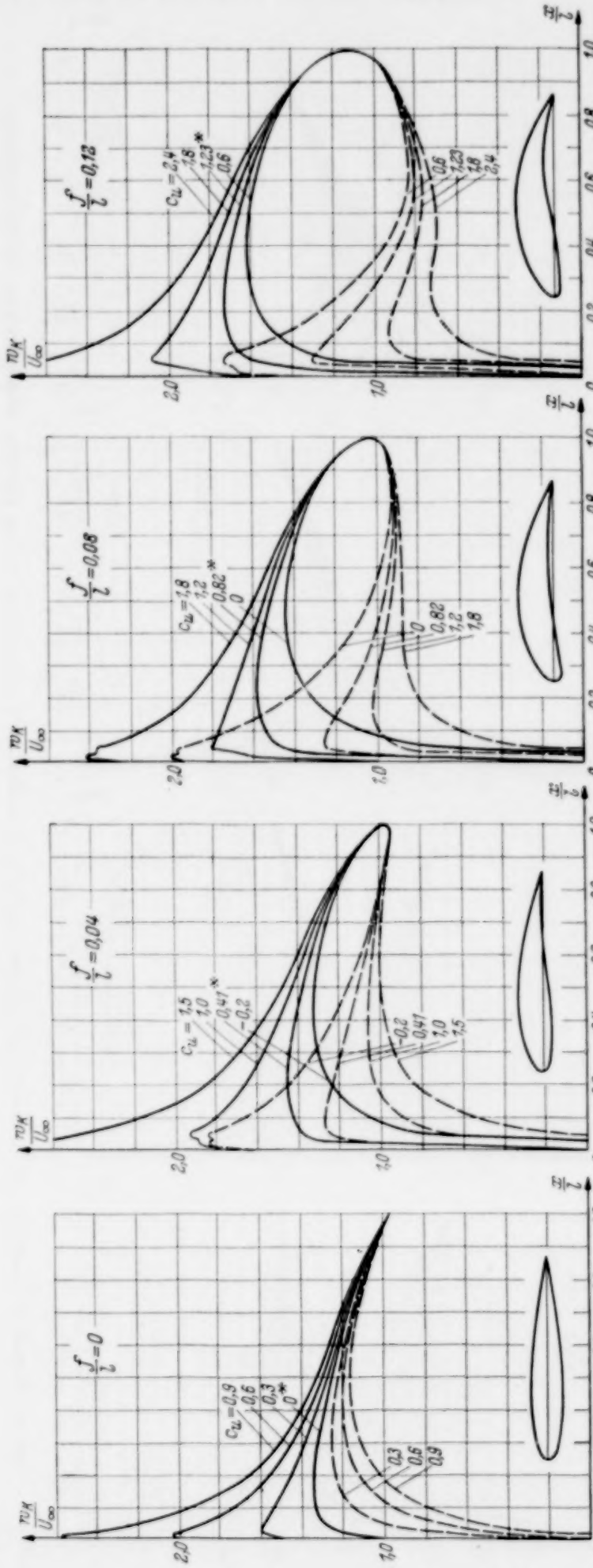


Abb. 9. Einfluß der Wölbung auf die Geschwindigkeitsverteilung eines Profiles im Gitter bei der Teilung $t/l = 0{,}75$. Dickenverteilung: NACA-Tropfen von $d/l = 0{,}15$.

Bei gewölbten Profilen (Abb. 12) verschwindet die Symmetrie zur Gitterumlenkung Null. Die Verluste haben ein flaches Minimum bei stoßfreiem Eintritt und steigen dann mit wachsender Gitterumlenkung an, ähnlich dem Verlauf bei symmetrischen Profilen. Dabei werden bis zu dem starken Anstieg der Verluste Gitterumlenkungen erreicht, die fast die Summe der Werte der symmetrischen Profile und der gewölbten Profile bei stoßfreiem Eintritt betragen. Der Maximalwert der Gitterumlenkung steigt wie beim symmetrischen Profil mit Verengung der Teilung an, wobei wieder gleichzeitig die Verluste anwachsen. Tritt bei Anströmung mit Rückenstoß an der Nase der Profilunterseite eine starke Druckspitze auf, dann löst dort die Grenzschicht ab. Die Verlustkurve läßt sich dann nicht weiter rechnerisch verfolgen, da eine derartige starke Ablösung mit der geschilderten Abschätzung des Ablösungswiderstandes nicht mehr erfaßt werden kann. Es tritt aber auf jeden Fall ein starker Anstieg der Verluste auf. Der quantitative Verlauf ist in diesem Bereich ohne praktisches Interesse.

d) Zu- und Abströmrichtung der Strömung. Entsprechend der

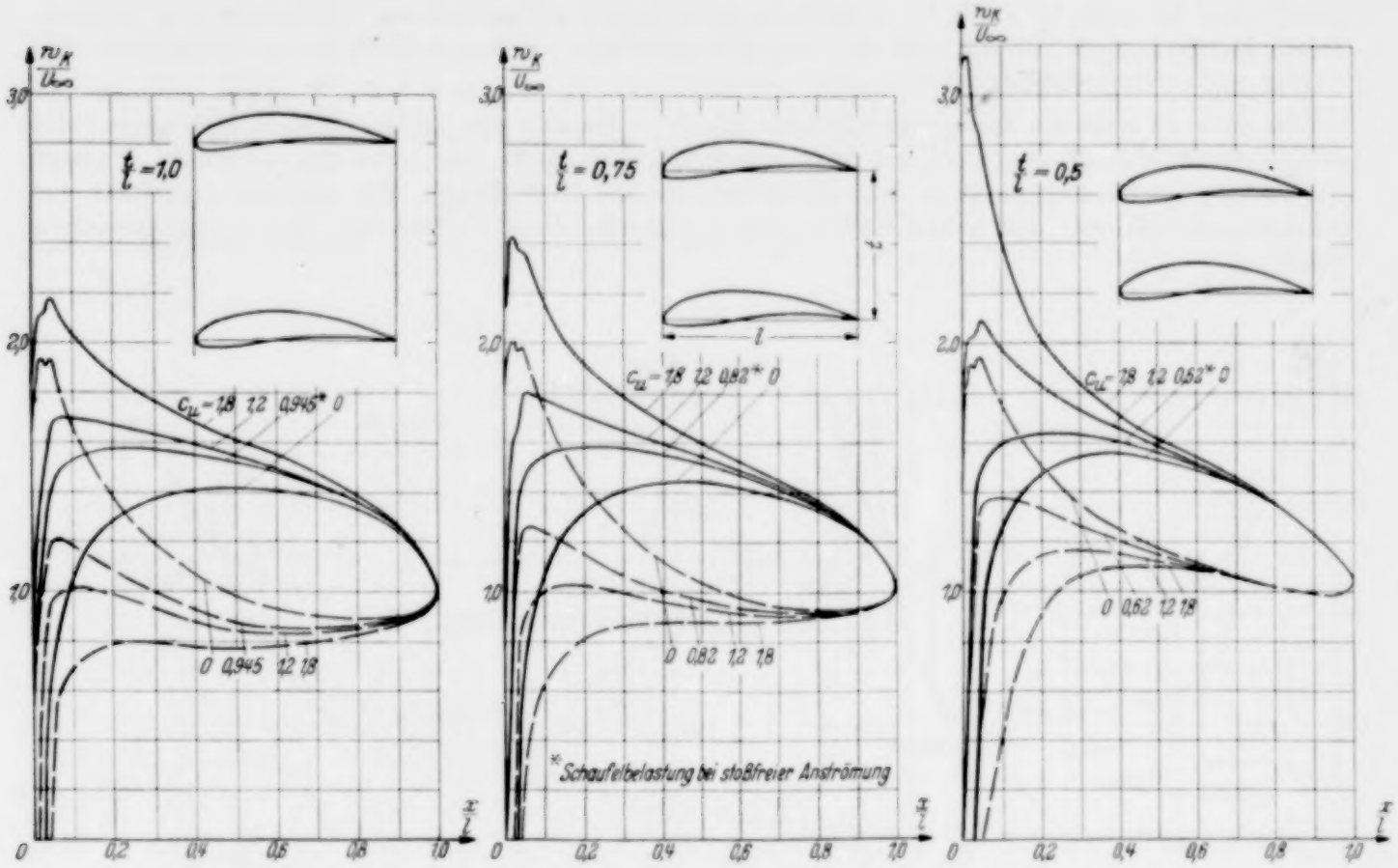


Abb. 10. Einfluß der Teilung auf die Geschwindigkeitsverteilung eines gewölbten Profiles ($f/l = 0{,}08$) im Gitter. Dickenverteilung: NACA-Tropfen, $d/l = 0.15$. * Schaufelbelastung bei stoßfreiem Eintritt.

Definition der Gitterumlenkung (43) ist mit der Angabe von Zu- o d e r Abströmwinkel als Funktion der Gitterumlenkung die Strömung vor und hinter dem Gitter eindeutig beschrieben. Für die symmetrischen Profile ist die Abströmrichtung nur wenig von $\beta_2 = 90°$ verschieden, wie Abb. 13 zeigt. Mit zunehmender Gitterumlenkung (steigender Zirkulation) und Vergrößerung der Teilung weicht der Abströmwinkel in Richtung einer Vergrößerung des Winkels ab. Mit zunehmender Profildicke werden die Abströmwinkel in gleicher Weise verändert. Zum Ver-

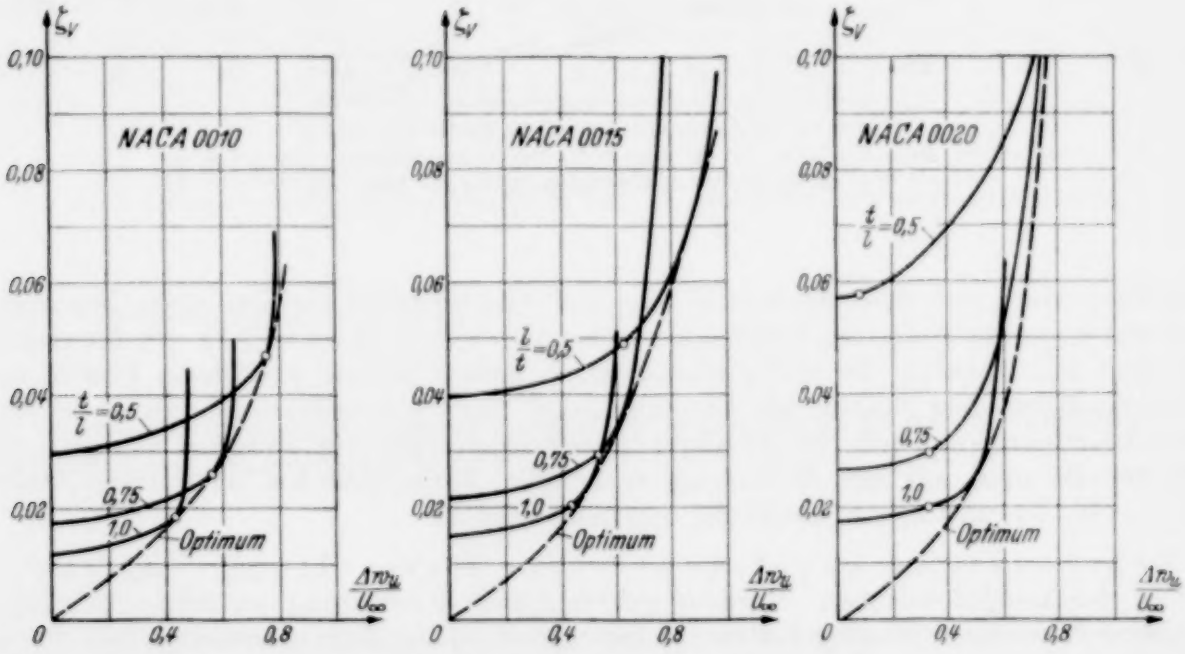


Abb. 11. Verlustbeiwerte der symmetrischen Profile im Gitter.
$Re = U_\infty\, l/\nu = 10^6$. ⊙ Beginn der Grenzschichtablösung.

gleich sind in Abb. 13 auch die Abströmwinkel in der reibungslosen Strömung eingetragen. Besonders bei enger Teilung sind die Abweichungen von der tatsächlichen reibungsbehafteten Strömung recht erheblich.

In Abb. 14 sind die Abströmwinkel für gewölbte Profile von 15% Dicke aufgetragen. Mit steigender Profilwölbung wird der Abströmwinkel verringert, und zwar um so mehr, je enger die Teilung ist (Annäherung an die schaufelkongruente Strömung). Die geringe Zunahme des Abströmwinkels mit der Schaufelbelastung entspricht dem Verlauf bei den symmetrischen Profilen.

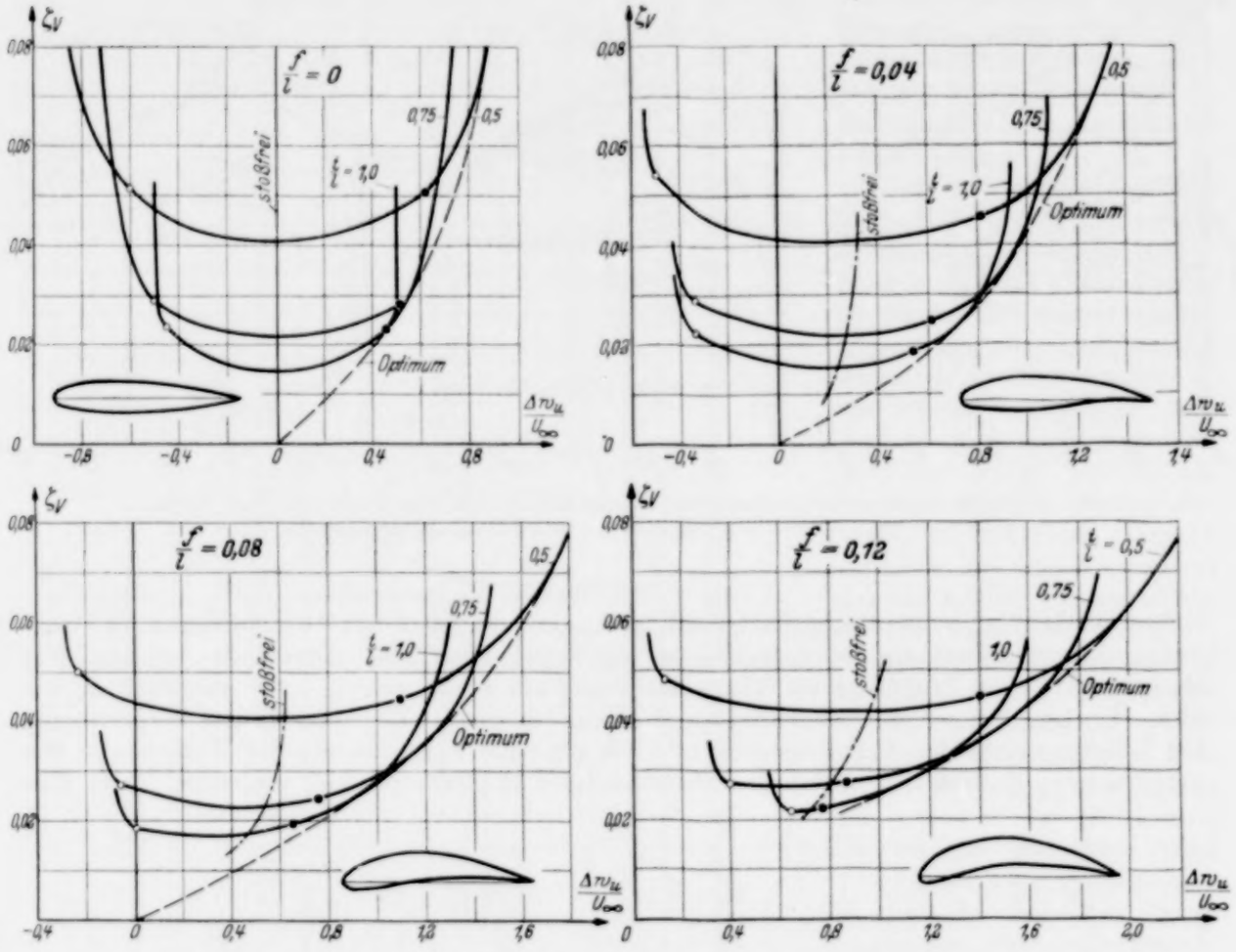


Abb. 12. Verlustbeiwerte gewölbter Profile im Gitter.
$d/l = 0{,}15$, $Re = U_\infty l/\nu = 10^6$. ● Beginn der Grenzschichtablösung auf der Oberseite, ○ Beginn der Grenzschichtablösung auf der Unterseite.

Da der Verlauf des Abströmwinkels über der Gitterumlenkung bei allen Teilungen und Wölbungen in grober Näherung ähnlich ist, müssen sich auch die Verläufe der Zuströmwinkel entsprechen [siehe (43)], die der Vollständigkeit halber für die gewölbten Profile mit eingezeichnet wurden. Der Anstieg der Zuströmwinkel über der Gitterumlenkung ist praktisch bei allen Anordnungen gleich, die Absolutwerte unterscheiden sich lediglich um eine additive Konstante, die man aus der Bedingung entnehmen kann, daß bei wirkungslosem Gitter, $\Delta w_u/U_\infty = 0$, Zu- und Abströmrichtung zusammenfallen.

c) Ergebnisse in angelsächsischer Darstellung. Um den Anschluß an die in der angelsächsischen Literatur gebräuchliche Darstellung zu erhalten, mögen die wichtigsten Ergebnisse unserer Untersuchungen noch in der dort gebräuchlichen Form dargestellt werden. Dabei werden die folgenden Größen benutzt, deren Zusammenhang mit den von uns verwandten Größen aus Abb. 15 abzulesen ist:

1. Der Zuströmwinkel (angle of incidence)

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_s$$

ist definiert als der Winkel zwischen der Zuströmrichtung und der Profilsehne.

2. Der Umlenkungswinkel (deflection)

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

ist der Winkel zwischen der Zu- und Abströmrichtung.

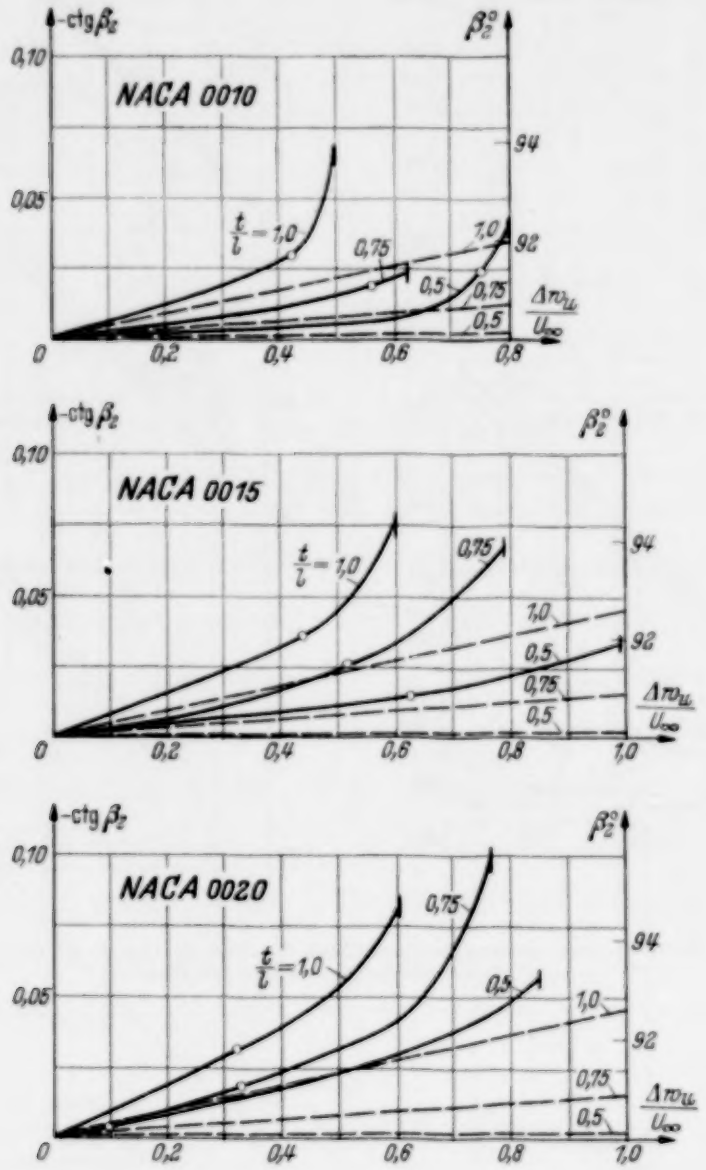


Abb. 13. Abströmwinkel bei Gittern aus symmetrischen Profilen. $Re = U_\infty\, l/\nu = 10^5$.
——— Abströmwinkel in der Strömung mit Reibung, - - - Abströmwinkel in der Potentialströmung.

3. Die Winkelübertreibung (deviation)

$$\delta = \beta_2 - \beta_H = \beta_2 - (\beta_s - \alpha_H)$$

ist der Winkel zwischen der Abströmrichtung und der Endtangente an die Skelettlinie.

4. Der Verlustbeiwert (loss of total head)

$$\zeta_V = \frac{\Delta g}{g_1 - p_2} = \frac{\Delta g}{\frac{\varrho}{2} w_2^2}$$

ist der Gesamtdruckverlust mit dem Staudruck der Abströmgeschwindigkeit dimensionslos gemacht [vgl. (38)].

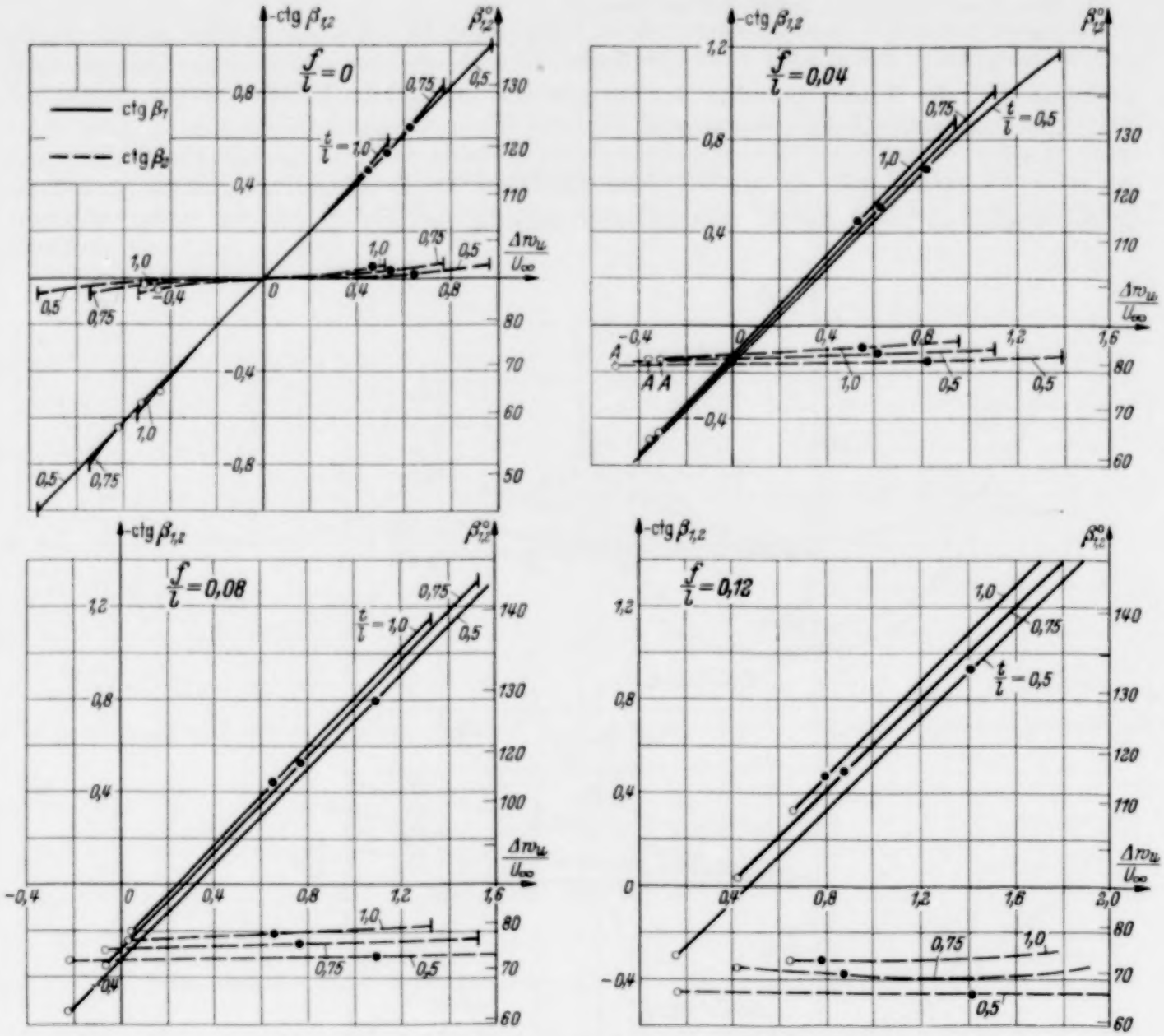
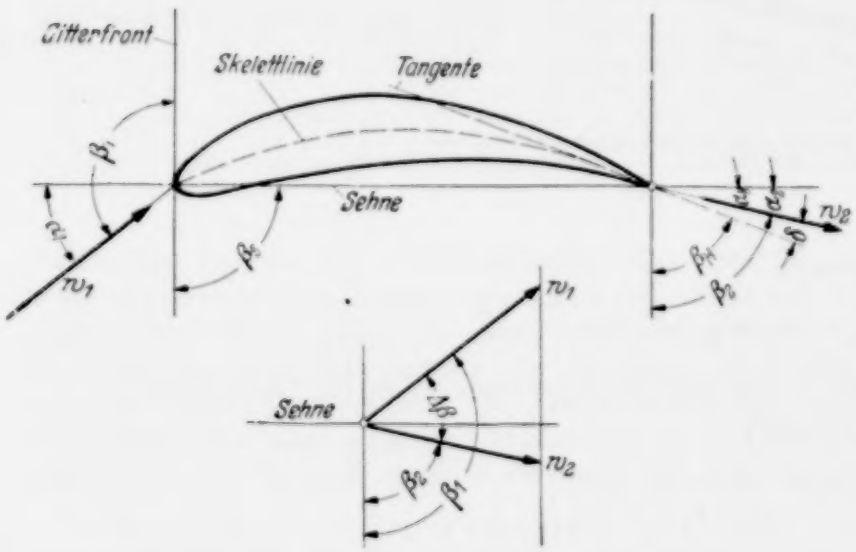


Abb. 14. Zu- und Abströmwinkel von Gittern aus gewölbten Profilen der Dicke $d/l = 0{,}15$, $Re = U_\infty l/\nu = 10^5$.
——— Zuströmwinkel β_1; - - - Abströmwinkel β_2.



Strömung:

α_1 Zuströmrichtung gegen Profilsehne (incidence)
β_1 Zuströmrichtung gegen Gitterfront
α_2 Abströmrichtung gegen Profilsehne
β_2 Abströmrichtung gegen Gitterfront
δ Winkelübertreibung (deflection)
$\Delta\beta$ Umlenkungswinkel (deviation)

Geometrie:

β_s Schaufelwinkel
α_{II} Richtung der Endtangente an die Skelettlinie gegen die Sehne
β_{II} Richtung der Endtangente an die Skelettlinie gegen die Gitterfront

f/l	0	0,04	0,08	0,12
α_{II}	0°	9,1°	17,8°	25,6°
$\beta_s - \alpha_{II}$	90°	80,9°	72,2°	64,4°

Abb. 15. Erläuterungsskizze zu den angelsächsischen Bezeichnungen.

Die Ergebnisse in angelsächsischer Darstellung sind in Abb. 16 für die symmetrischen und in Abb. 17 für die gewölbten Profile zusammengefaßt. In den oberen Diagrammen sind der Umlenkwinkel $\Delta\beta$ und die Winkelübertreibung δ in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel α_1 dargestellt, und in den unteren Diagrammen der Verlustbeiwert in Abhängigkeit von α_1.

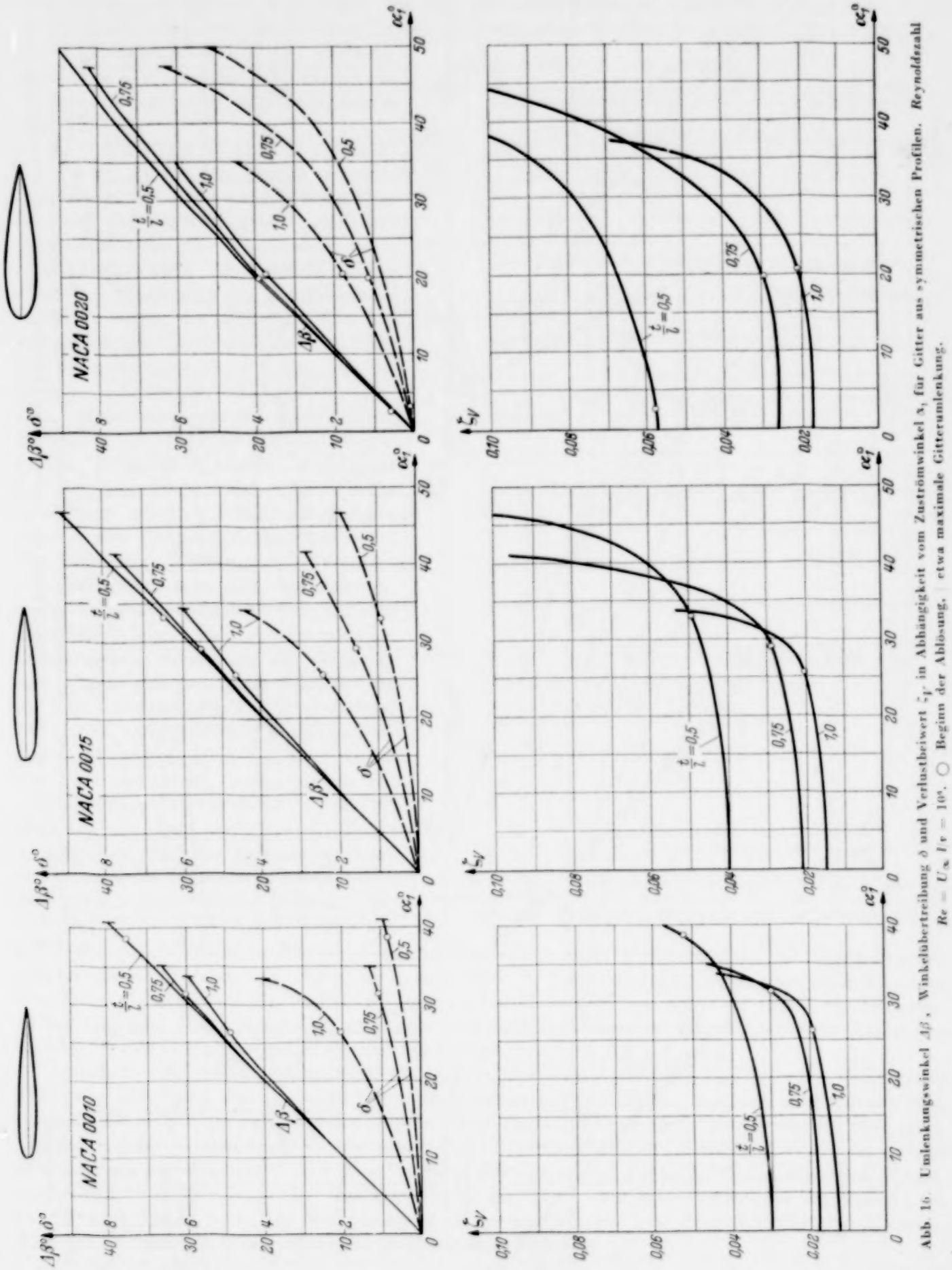


Abb. 16. Umlenkungswinkel $\Delta\beta$, Winkelübertreibung δ und Verlustbeiwert ζ_V in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel α_1 für Gitter aus symmetrischen Profilen. *Reynoldszahl* $Re = U_\infty l/\nu = 10^5$. ○ Beginn der Ablösung, etwa maximale Gitterumlenkung.

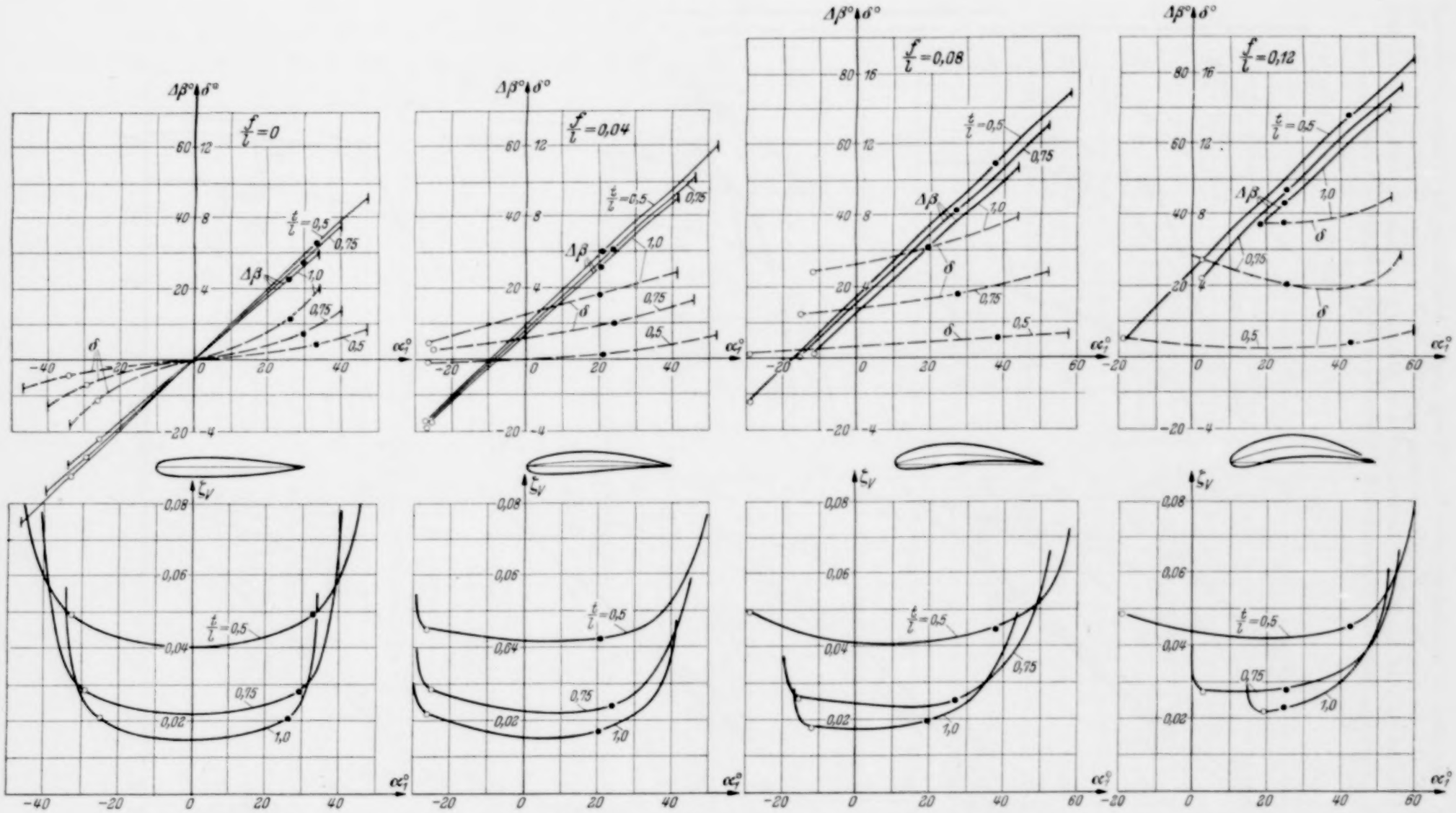


Abb. 17. Umlenkungswinkel $\Delta\beta$, Winkelübertreibung δ und Verlustbeiwert ζ_V in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel α_1 für Gitter aus gewölbten Profilen der Dicke $d/l = 0{,}15$. *Reynoldszahl* $Re = U_\infty l/\nu = 10^5$. ● Beginn der Ablösung auf der Oberseite, ○ Beginn der Ablösung auf der Unterseite, etwa maximale Gitterumlenkung.

Die Kurvenverläufe in angelsächsicher Darstellung unterscheiden sich nur geringfügig von denen unserer Darstellung in Abb. 11 bis 14, die eingehend diskutiert wurden. Hervorzuheben ist lediglich die Darstellung des Abströmwinkels β_2 mittels der Winkelübertreibung δ, in der Form $\beta_2 = \delta + (\beta_s - \alpha_H)$, wobei die rein geometrische Größe $\beta_s - \alpha_H$ aus der Tabelle zu Abb. 15 entnommen werden kann. Die Winkelübertreibung δ gibt unmittelbar die Abweichung der Strömungsrichtung von derjenigen der sog. Stromfadentheorie, welche $\delta \equiv 0$ annimmt. Da die Stromfadentheorie sehr dünne Profile und sehr enge Teilung voraussetzt, ist es klar, daß die Winkelübertreibung δ mit wachsender Dicke und wachsender Teilung anwächst: sie erreicht maximal Werte von 6 bis 8°.

f) Günstigste Gitteranordnungen. Die Aufgabe eines Schaufelgitters, eine vorgegebene Umlenkung der Strömung bei gegebener Zuströmrichtung hervorzurufen, kann durch sehr viele Gitteranordnungen (Teilung, Staffelung und Profilformen) erfüllt werden. Es soll nun das Ziel der folgenden Überlegungen sein, hierfür die günstigste Anordnung, die die geringsten Verluste verursacht, zu finden. Dabei soll vorerst von Nebenbedingungen im Hinblick auf Kavitation, Verdichtungsstöße, Festigkeit u. ä. m. abgesehen werden, wobei eine Erfüllung dieser Nebenbedingungen aber keine grundsätzliche Änderung der folgenden Ergebnisse bedingt.

Beschränkt man sich auf das ungestaffelte Gitter, dann ist bei gleichem Profil die Abströmrichtung im wesentlichen gleich, man kann die Wirkung des Gitters also gut durch eine Größe, die Gitterumlenkung, beschreiben. Man erhält bei vorgegebener Gitterumlenkung die günstigsten Verluste durch die Enveloppe der Verlustkurven bei verschiedener Teilung (Abb. 11 und 12), die mit Optimum bezeichnet ist. Es ist zu beachten, daß die Optimalwerte erreicht werden, wenn die Grenzschicht schon leicht abgelöst ist. Dieses, vom Einzelprofil abweichende Verhalten ist damit zu erklären, daß beim Gitterverlust neben dem Widerstand des einzelnen Profiles auch noch die Profilzahl (Teilung) maßgeblich ist. Es wird der geringste Verlust erreicht, wenn der Minimalwiderstand des einzelnen Profiles schon überschritten, dafür aber noch die Schaufelzahl gering ist. Die Kurven optimaler Verluste sind zusammen mit den zugehörigen Teilungen in Abb. 18 für alle gerechneten Profile zusammengestellt.

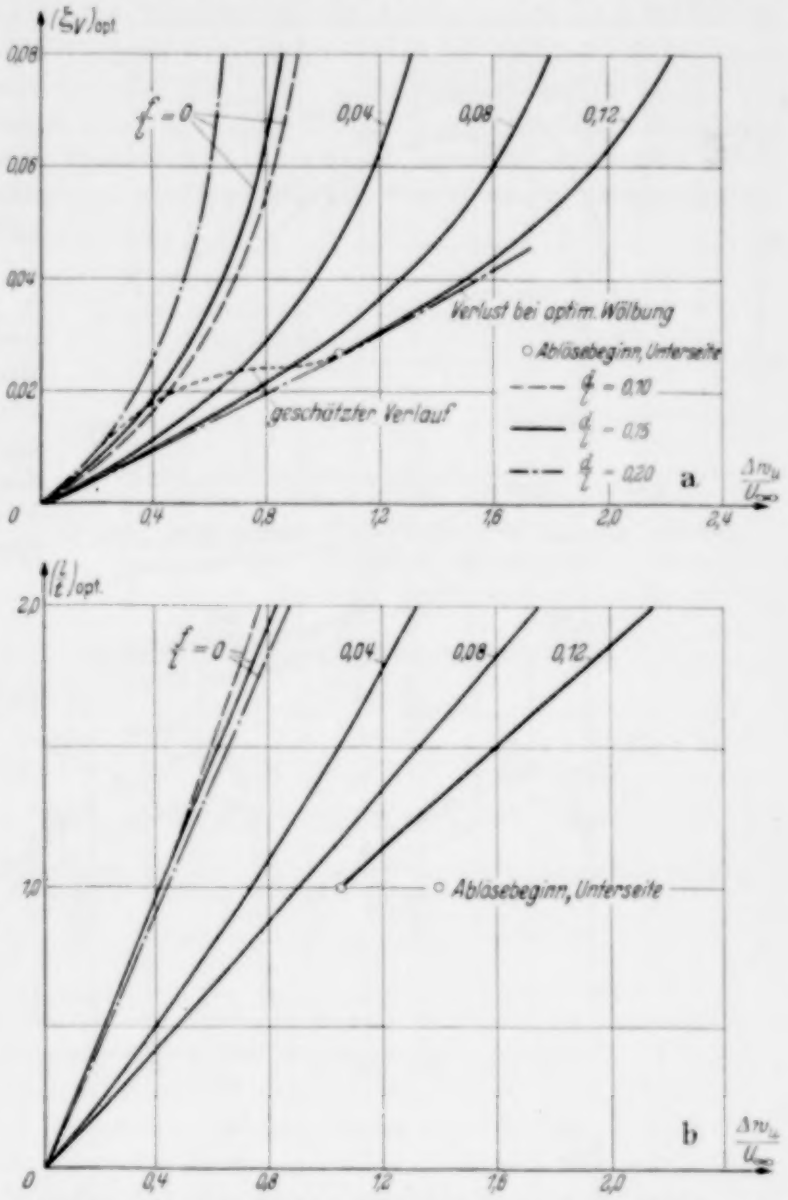


Abb. 18. Geringste Verluste (a) und zugehörige Teilung (b) bei einer vorgegebenen Gitterumlenkung $\Delta w_u/U_\infty$. - - - $d/l = 0{,}1$, ——— $d/l = 0{,}15$, - . - . - $d/l = 0{,}2$, ○ Ablösung der Grenzschicht auf der Profilunterseite.

Durch Vergleich der Optimalkurven der Verluste symmetrischer Profile bei verschiedenen Dicken erhält man eine Aussage über die günstigste Profildicke. Aus den gerechneten Beispielen läßt sich diese nicht direkt ablesen. Die Tatsache einer optimalen Dicke ist aber sinnfällig, denn der Verlust eines Gitters aus ebenen Platten (Dicke 0) übersteigt bei weitem die der gerechneten Anordnungen. Die Bestimmung der optimalen Dicke läßt sich über das Einzelprofil durchführen. Bei weiter Teilung weicht die Geschwindigkeitsverteilung des Profiles im Gitter und damit auch der Widerstandsbeiwert nicht mehr von dem des Einzelprofiles ab. Man erhält dann für Verlustbeiwert und Gitterumlenkung

$$\zeta_V = \frac{l}{t} c_w, \qquad \frac{\Delta w_u}{U_\infty} = \frac{c_a}{2} \frac{l}{t} = \frac{c_a}{2} \frac{l}{t},$$

woraus sich der Anstieg des Verlustbeiwertes über der Gitterumlenkung bei großen Teilungen für kleine $\Delta w_u/U_\infty$ ergibt zu

$$\frac{\zeta_V}{\Delta w_u/U_\infty} = 2\,\frac{c_w}{c_a} = 2\,\varepsilon\,.$$

Der Anstieg ist also der Gleitzahl ε des Einzelprofiles proportional. In Abb. 19 sind für das symmetrische Einzelprofil die gerechneten Gleitzahlen zusammen mit den Meßwerten des NACA Rep. 460 über der Dicke aufgetragen. Danach liegt die optimale Dicke bei etwa $d/l = 0{,}1$. Damit ist im Bereich weiter Teilung die günstigste Dicke ermittelt. Da sich auch im Bereich enger Teilungen die Kurven optimaler Verluste (Abb. 18) nicht überschneiden, kann man diese Aussage auch auf alle Teilungen übertragen.

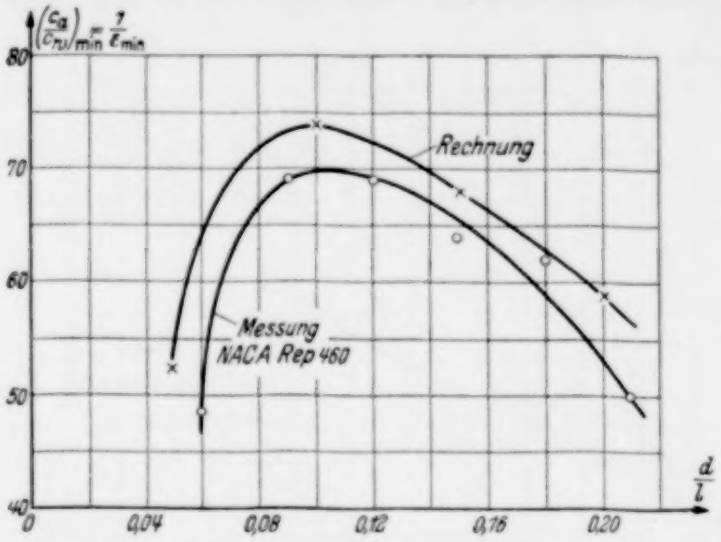


Abb. 19. $(c_a/c_w)_{max}$ als Funktion der Profildicke beim symmetrischen Einzelprofil.

Entsprechend läßt sich auch bei gewölbten Profilen für eine gegebene Gitterumlenkung eine günstigste Wölbung bestimmen, wie man aus Abb. 18 ablesen kann. Dies ist an dem Verlauf der Optimalkurve von $f/l = 0{,}12$ deutlich zu ersehen, die bei geringen Gitterumlenkungen höhere Verlustbeiwerte als geringer gewölbte Profile aufweist. Dieses Verhalten liegt daran,

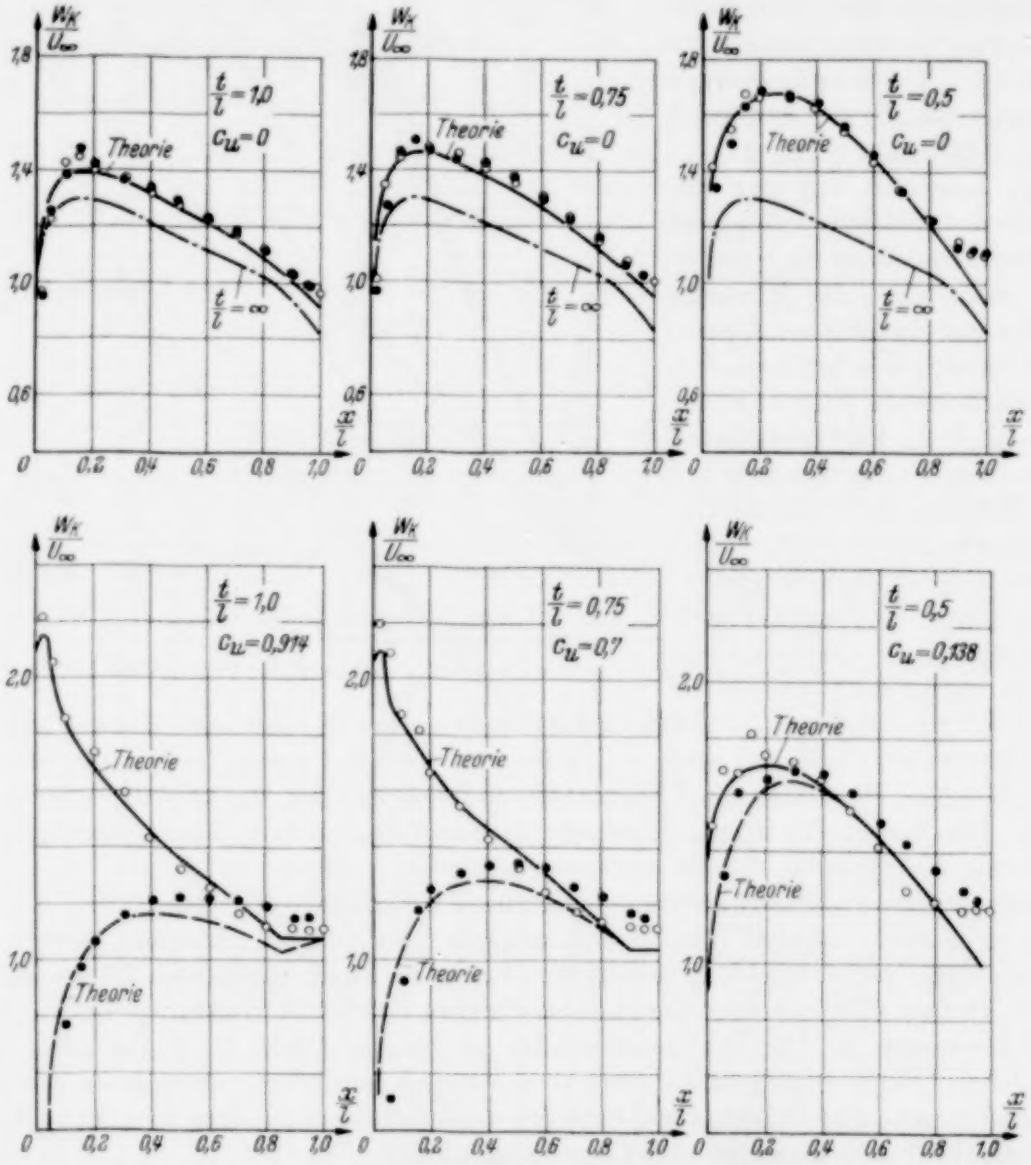


Abb. 20. Geschwindigkeitsverteilung des symmetrischen Profiles NACA 0020 im Gitter. Vergleich von Messung und Rechnung. Rechnung: ——— Oberseite; — — — Unterseite; Messung: ○ Oberseite; ● Unterseite.

daß die Grenzschicht stark gewölbter Profile bei weiten Teilungen an der Profilunterseite (Hohlseite) ablöst. Dieses Ablösen beginnt bei um so engeren Teilungen, je stärker die Profile gewölbt sind. Damit ergibt sich dann bei gewölbten Profilen eine günstigste Wölbung, die von der Gitterumlenkung abhängig ist. Der Verlauf der Verluste bei günstigster Wölbung ist in Abb. 18 angedeutet. Es zeigt sich dabei, daß das Minimum der Verluste über der Wölbung außerordentlich flach verläuft.

g) Vergleich der Rechnungen mit Messungen. Die Rechenergebnisse können für ein Gitter aus symmetrischen NACA-Profilen der Dicke $d/l = 0{,}1$ und $d/l = 0{,}2$ mit noch unveröffentlichten Messungen von *N. Scholz* verglichen werden. Bei den Messungen wurde die Grenzschicht durch einen Stördraht über die ganze Lauflänge turbulent gemacht, der auf beiden Seiten des Profiles im Abstand $x/l = 0{,}07$ angebracht war. Damit ist die in der Rechnung vorausgesetzte voll turbulente Grenzschicht nahezu verwirklicht. Die theoretischen Ergebnisse wurden dann nach (44) auf die *Reynolds*zahl der Messung umgerechnet.

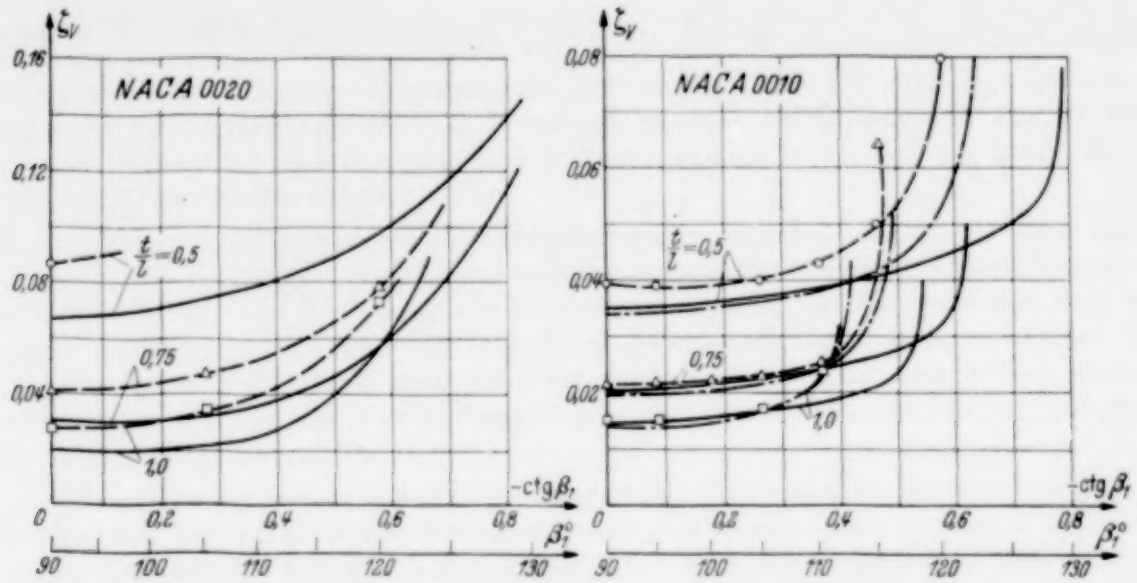


Abb. 21. Verlustbeiwerte des Gitters aus symmetrischen Profilen. $Re = U_\infty\, l/\nu = 5 \cdot 10^5$. Vergleich Rechnung und Messung.
Rechnung: ———; Rechnung mit Grenzschichtrechnung nach *E. Truckenbrodt*[1]: — . —
Messung nach *Scholz*: $\frac{t}{l}$ 0,5 ——○—— 0,75 ——△—— 1,0. ——□——

In Abb. 20 sind für ein ungestaffeltes Gitter aus Profilen NACA 0020 die gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen zusammen mit denen der Rechnung aufgetragen. Die Übereinstimmung ist gut, lediglich im Falle von Grenzschichtablösungen treten Abweichungen auf.

Die Verlustbeiwerte nach Messung und Rechnung sind für Gitter aus Profilen NACA 0010 und NACA 0020 in Abb. 21 verglichen. Die Übereinstimmung ist gut, lediglich der starke Verlustanstieg setzt bei der Rechnung bei höheren Gitterumlenkungen als in der Messung ein. Diese Abweichung ist aber auf das Näherungsverfahren für die Grenzschicht nach *E. Gruschwitz* zurückzuführen, denn nach dem neueren Rechenverfahren für die Grenzschicht nach *E. Truckenbrodt*[1] ergeben sich Verlustbeiwerte, die denen der Messung wesentlich besser entsprechen, wie ebenfalls aus Abb. 21 zu ersehen ist.

5. Zusammenfassung. Zur Berechnung der Gitterverluste eines ebenen ungestaffelten Schaufelgitters aus vorgegebenen Profilen ist ein Rechenverfahren im Anschluß an eine Arbeit von *H. Schlichting* und *N. Scholz* entwickelt worden. Als erster Schritt wird dabei mit Hilfe der Singularitätenmethode die Geschwindigkeitsverteilung an der Profilkontur sowie Zu- und Abströmrichtung in reibungsloser Strömung ermittelt. Mit den Ergebnissen der folgenden Grenzschichtrechnung werden die Gitterverluste sowie die Änderung von Zu- und Abströmrichtung durch die Reibung berechnet.

Um einen Einblick in die Abhängigkeit der Strömungsparameter von den wesentlichsten geometrischen Parametern Profildicke und -wölbung sowie Gitterteilung zu erhalten (der Schaufelwinkel ist beim ungestaffelten Gitter unverändert $\beta_s = 90°$), sind die in Abb. 6 dar-

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 305.

gestellten Gitteranordnungen systematisch gerechnet worden. Aus den Ergebnissen sind diejenigen Anordnungen ermittelt worden, die bei einer vorgegebenen Strömungsumlenkung durch das Gitter die geringsten Verluste verursachen. Beschreibt man die vorgegebene Strömungsumlenkung durch die Gitterumlenkung (Änderung der Umfangskomponente der Abströmrichtung gegenüber der der Zuströmrichtung, mit der Durchsatzgeschwindigkeit dimensionslos gemacht), dann ergibt sich bei jedem Profil für eine gegebene Gitterumlenkung eine günstigste Teilung, bei der die Verluste einen Minimalwert annehmen. Diese Optimalwerte sind für alle gerechneten Profile in Abb. 18 zusammengefaßt. Mit diesen Optimalkurven lassen sich dann auch die Profile ermitteln, die ihrerseits für eine vorgegebene Aufgabe am günstigsten sind. Bei symmetrischen Profilen verursacht das 10% dicke Profil bei allen Gitterumlenkungen die geringsten Verluste. Bei gewölbten Profilen ist die günstigste Wölbung von der Gitterumlenkung abhängig, und zwar wächst die günstigste Wölbung mit der Gitterumlenkung.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *L. Speidel*, Institut für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig.

Kriechen und Schwinden bei statisch unbestimmten Betonkonstruktionen mit Tragteilen aus Stahl *.

Von G. Nitsiotas.

1. Einleitung. Die Formänderungen des Betons infolge ständiger Belastung sind zeitlich betrachtet nicht konstant. Sie hängen ab vom Zeitpunkt des Auflegens der Belastung und dem Zeitpunkt, in dem sie gemessen werden. Diese Eigenschaft des Betons ist ohne Belang für die Bestimmung der inneren Schnittkräfte statisch bestimmter Betonkonstruktionen. Sobald es sich aber um statisch unbestimmte Konstruktionen handelt, deren Schnittkräfte bzw. Überzähligen aus Deformationsbedingungen erfolgen, ist zu erwarten, daß neben den Formänderungen auch die Schnittkräfte von der Zeit abhängig sind. *F. Dischinger* [1] untersuchte statisch unbestimmte reine Betonkonstruktionen und bewies, daß die Überzähligen infolge ständiger Belastung trotz des Kriechens zeitlich konstant bleiben, während jene aus Widerlagerverschiebung und Schwinden sich mit der Zeit ändern, und zwar so, daß sie durch das Kriechen nicht gegenseitig beeinflußt werden.

Wenn eine Betonkonstruktion noch Traglieder aus Stoffen besitzt, die nicht mitkriechen, wie z. B. aus Stahl, so ändern sich dann zeitlich neben der übrigen Überzähligen noch jene infolge ständiger Last. Die Stahltragteile können stetig oder stellenweise mit dem Beton verbunden sein. Im ersten Fall handelt es sich um Verbundträger bzw. bewehrter Betonkonstruktion, im zweiten Fall um Träger mit Zugbändern, vorgespannten Träger ohne Verbund usw. Unabhängig der Art der Verbindung ergibt sich die Form der Differenzialgleichungen, welche die Überzähligen erfüllen.

Von *F. Dischinger* stammen strenge Lösungen für Systeme, zusammengesetzt aus Beton- und Stahlgliedern, bei welchen das Vorhandensein des Stahles eine statische Unbestimmtheit ersten Grades hervorruft, wie z. B. die Drucksäule [1] und der Bogen mit Zugband [2]. *H. Fröhlich* [3] gab die strenge Lösung für den Verbundquerschnitt unter Annahme eines konstanten federnden Elastizitätsmoduls des Betons. *Sontag* [4] gelang es, durch Vernachlässigung unwesentlicher Größen näherungsweise das Problem auch für veränderlichen Elastizitätsmodul des Betons zu lösen. Bewehrte statisch unbestimmte Betonkonstruktionen wurden mittels des Begriffes des behinderten Kriechmaßes von *F. Dischinger* [1] untersucht. Von *K. Sattler* [5] stammen Näherungslösungen für beliebige st. unbestimmte Verbundträger mit veränderlichen Steifigkeiten.

In der vorliegenden Arbeit werden die Differentialgleichungen statisch unbestimmter Betonkonstruktionen mit Tragteilen aus Stahl unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit des federnden E-Moduls des Betons aufgestellt und streng gelöst. Hierbei wird das Verfahren sowohl auf statisch bestimmte, als auch auf statisch unbestimmte Grundsysteme angewendet.

Abweichend von den üblichen Bezeichnungen wird eine Größe g mit einem oder zwei Querstrichen versehen, je nachdem ob sie sich auf den Betonquerschnitt oder den Stahlquerschnitt bezieht. Der Platz rechts oben wird den Zeitindices τ und t vorbehalten; davon bedeutet der erste den Zeitpunkt des Auferlegens der Belastung und der zweite den Zeitpunkt, in dem die Größe gemessen wird. Rechts unten findet man wie üblich die Indices i und k des Wirkungsortes und der Ursache. Hiermit sind die Größen $\bar{g}_{ik}^{\tau t}$ und $\bar{\bar{g}}_{ik}^{\tau t}$ eindeutig definiert.

2. Ermittlung der Überzähligen einer statisch unbestimmten Betonkonstruktion mit Tragteilen aus Stahl. Wir betrachten ein beliebiges, z. B. dreifach statisch unbestimmtes System, zusammengesetzt aus Beton- und Stahltragteilen, dessen Überzählige X_i ($i = 1, 2, 3$)

* Herrn Prof. Dr.-Ing. *Adolf Pucher* zum 50. Geburtstag in Dankbarkeit gewidmet.

[1] *F. Dischinger*, Bauing. 20 (1939), S. 54.

[2] *F. Dischinger*, Der Massivbau, *Schleicher*sches Taschenbuch für Bauingenieure S. 1340, Berlin 1943.

[3] *H. Fröhlich*, Bauing. 24 (1949), S. 300.

[4] *H. J. Sontag*, Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen von Verbundträgern. Dissertation Karlsruhe 1951.

[5] *K. Sattler*, Theorie der Verbundkonstruktionen, Berlin 1953.

gestellten Gitteranordnungen systematisch gerechnet worden. Aus den Ergebnissen sind diejenigen Anordnungen ermittelt worden, die bei einer vorgegebenen Strömungsumlenkung durch das Gitter die geringsten Verluste verursachen. Beschreibt man die vorgegebene Strömungsumlenkung durch die Gitterumlenkung (Änderung der Umfangskomponente der Abströmrichtung gegenüber der der Zuströmrichtung, mit der Durchsatzgeschwindigkeit dimensionslos gemacht), dann ergibt sich bei jedem Profil für eine gegebene Gitterumlenkung eine günstigste Teilung, bei der die Verluste einen Minimalwert annehmen. Diese Optimalwerte sind für alle gerechneten Profile in Abb. 18 zusammengefaßt. Mit diesen Optimalkurven lassen sich dann auch die Profile ermitteln, die ihrerseits für eine vorgegebene Aufgabe am günstigsten sind. Bei symmetrischen Profilen verursacht das 10% dicke Profil bei allen Gitterumlenkungen die geringsten Verluste. Bei gewölbten Profilen ist die günstigste Wölbung von der Gitterumlenkung abhängig, und zwar wächst die günstigste Wölbung mit der Gitterumlenkung.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *L. Speidel*, Institut für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig.

Kriechen und Schwinden bei statisch unbestimmten Betonkonstruktionen mit Tragteilen aus Stahl *.

Von G. Nitsiotas.

1. Einleitung. Die Formänderungen des Betons infolge ständiger Belastung sind zeitlich betrachtet nicht konstant. Sie hängen ab vom Zeitpunkt des Auflegens der Belastung und dem Zeitpunkt, in dem sie gemessen werden. Diese Eigenschaft des Betons ist ohne Belang für die Bestimmung der inneren Schnittkräfte statisch bestimmter Betonkonstruktionen. Sobald es sich aber um statisch unbestimmte Konstruktionen handelt, deren Schnittkräfte bzw. Überzähligen aus Deformationsbedingungen erfolgen, ist zu erwarten, daß neben den Formänderungen auch die Schnittkräfte von der Zeit abhängig sind. *F. Dischinger* [1] untersuchte statisch unbestimmte reine Betonkonstruktionen und bewies, daß die Überzähligen infolge ständiger Belastung trotz des Kriechens zeitlich konstant bleiben, während jene aus Widerlagerverschiebung und Schwinden sich mit der Zeit ändern, und zwar so, daß sie durch das Kriechen nicht gegenseitig beeinflußt werden.

Wenn eine Betonkonstruktion noch Tragglieder aus Stoffen besitzt, die nicht mitkriechen, wie z. B. aus Stahl, so ändern sich dann zeitlich neben der übrigen Überzähligen noch jene infolge ständiger Last. Die Stahltragteile können stetig oder stellenweise mit dem Beton verbunden sein. Im ersten Fall handelt es sich um Verbundträger bzw. bewehrter Betonkonstruktion, im zweiten Fall um Träger mit Zugbändern, vorgespannten Träger ohne Verbund usw. Unabhängig der Art der Verbindung ergibt sich die Form der Differenzialgleichungen, welche die Überzähligen erfüllen.

Von *F. Dischinger* stammen strenge Lösungen für Systeme, zusammengesetzt aus Beton- und Stahlgliedern, bei welchen das Vorhandensein des Stahles eine statische Unbestimmtheit ersten Grades hervorruft, wie z. B. die Drucksäule [1] und der Bogen mit Zugband [2]. *H. Fröhlich* [3] gab die strenge Lösung für den Verbundquerschnitt unter Annahme eines konstanten federnden Elastizitätsmoduls des Betons. *Sontag* [4] gelang es, durch Vernachlässigung unwesentlicher Größen näherungsweise das Problem auch für veränderlichen Elastizitätsmodul des Betons zu lösen. Bewehrte statisch unbestimmte Betonkonstruktionen wurden mittels des Begriffes des behinderten Kriechmaßes von *F. Dischinger* [1] untersucht. Von *K. Sattler* [5] stammen Näherungslösungen für beliebige st. unbestimmte Verbundträger mit veränderlichen Steifigkeiten.

In der vorliegenden Arbeit werden die Differentialgleichungen statisch unbestimmter Betonkonstruktionen mit Tragteilen aus Stahl unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit des federnden E-Moduls des Betons aufgestellt und streng gelöst. Hierbei wird das Verfahren sowohl auf statisch bestimmte, als auch auf statisch unbestimmte Grundsysteme angewendet.

Abweichend von den üblichen Bezeichnungen wird eine Größe g mit einem oder zwei Querstrichen versehen, je nachdem ob sie sich auf den Betonquerschnitt oder den Stahlquerschnitt bezieht. Der Platz rechts oben wird den Zeitindices τ und t vorbehalten; davon bedeutet der erste den Zeitpunkt des Auferlegens der Belastung und der zweite den Zeitpunkt, in dem die Größe gemessen wird. Rechts unten findet man wie üblich die Indices i und k des Wirkungsortes und der Ursache. Hiermit sind die Größen $\bar{g}_{ik}^{\tau t}$ und $\bar{\bar{g}}_{ik}^{\tau t}$ eindeutig definiert.

2. Ermittlung der Überzähligen einer statisch unbestimmten Betonkonstruktion mit Tragteilen aus Stahl. Wir betrachten ein beliebiges, z. B. dreifach statisch unbestimmtes System, zusammengesetzt aus Beton- und Stahltragteilen, dessen Überzählige X_i ($i = 1, 2, 3$)

---

* Herrn Prof. Dr.-Ing. *Adolf Pucher* zum 50. Geburtstag in Dankbarkeit gewidmet.

[1] *F. Dischinger*, Bauing. 20 (1939), S. 54.

[2] *F. Dischinger*, Der Massivbau, *Schleicher*sches Taschenbuch für Bauingenieure S. 1340, Berlin 1943.

[3] *H. Fröhlich*, Bauing. 24 (1949), S. 300.

[4] *H. J. Sontag*, Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen von Verbundträgern. Dissertation Karlsruhe 1951.

[5] *K. Sattler*, Theorie der Verbundkonstruktionen, Berlin 1953.

sind. Die Elastizitätsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \delta_{1q} &= 0\,, \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \delta_{2q} &= 0\,, \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \delta_{3q} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierbei ist δ_{ik} die gegenseitige Verschiebung der Angriffspunkte der Überzähligen X_i infolge der Grundbelastung $X_k = +1$ und wird durch folgende Formel bestimmt:

$$\delta_{ik} = \int \frac{\overline{\mathfrak{M}}_i\,\mathfrak{M}_k}{E_b^{\circ} J_b}\,ds + \int \frac{\mathfrak{N}_i\,\mathfrak{N}_k}{E_b^{\circ} F_b}\,ds + \int \frac{\mathfrak{M}_i\,\mathfrak{M}_k}{E_e J_e}\,ds + \int \frac{\mathfrak{N}_i\,\mathfrak{N}_k}{E_e F_e}\,ds$$

oder $$\delta_{ik} = \bar{\delta}_{ik} + \bar{\bar{\delta}}_{ik}\,.$$

$\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{N}_i$ sind die Momente und Normalkräfte im Grundsystem infolge der Grundbelastung $X_i = +1$.

Die Verschiebungen δ_{iq} infolge der äußeren Belastung bzw. des Zwanges setzen sich aus folgenden drei Teilen zusammen:

$\delta_{ig} = \bar{\delta}_{ig} + \bar{\bar{\delta}}_{ig}$ Verschiebung infolge ständiger Last,
$\delta_{iw} = Al_i$ „ „ Ausweichens der Widerlager,
$\delta_{is} = \bar{\delta}_{is}$ „ „ Schwindens ohne Kriechen.

Dementsprechend setzen sich die X_{iq} ebenfalls aus drei Teilen X_{ig}, X_{iw} und X_{is} zusammen. Durch Auflösung des Systems folgen die Werte der Überzähligen zu

$$X_{1q}^{\circ 0} = -\frac{D_{1q}}{D}\,, \qquad X_{2q}^{00} = -\frac{D_{2q}}{D}\,, \qquad X_{3q}^{00} = -\frac{D_{3q}}{D}\,,$$

wobei D, D_{1q}, D_{2q}, D_{3q} die Determinanten des Systems (1) sind und $X_{ig}^{\tau t}$ die Kraft im Punkte i, gemessen im Zeitpunkt t infolge der Belastung q, aufgebracht im Zeitpunkte τ, ist.

Gewöhnlich wird $X_{ig}^{\tau t} = X_{iq}^{00}$ angenommen. Diese Beziehung gilt unter folgenden drei Annahmen.

a) Die Formänderungsgrößen δ_{ik} des Grundsystems sind zeitlich betrachtet konstant,

b) das Maß des Ausweichens der Widerlager ist ebenfalls konstant,

c) das Schwinden des Betons vollzieht sich stoßartig im Augenblick des Ausrüstens der Konstruktion.

In Wirklichkeit aber ändern sich unter dem Einfluß des Kriechens mit der Zeit die Formänderungsgrößen δ_{ik}, so daß die Elastizitätsbedingungen (1) ihre Gültigkeit verlieren. Um diese Unstimmigkeit zu beseitigen, müssen wir die Elastizitätsbedingung für einen beliebigen Zeitpunkt t unter Berücksichtigung der Kriecheinflüsse aufstellen und die im Zeitpunkt 0 vorhandene Überzählige X_{iR}^{00} durch zusätzliche mit der Zeit veränderliche Kräfte Y_{iR}^{0t} ergänzen. Demnach wird

$$X_{1R}^{0t} = X_{1R}^{00} + Y_{1R}^{0t}\,, \qquad X_{2R}^{0t} = X_{2R}^{00} + Y_{2R}^{0t}\,, \qquad X_{3R}^{0t} = X_{3R}^{00} + Y_{3R}^{0t}\,, \tag{2a}$$

wobei der Index $R = g + w$ die Überlagerung der Belastungsfälle, ständige Last und Widerlagerausweichen bezeichnet. Das Schwinden des Betons setzt mit dem Kriechen gleichzeitig ein, und im Zeitpunkt Null sind die entsprechenden Überzähligen gleich Null. Daher kommt

$$X_{1s}^{0t} = Y_{1s}^{0t}\,, \qquad X_{2s}^{0t} = Y_{2s}^{0t}\,, \qquad X_{3s}^{0t} = Y_{3s}^{0t}\,. \tag{2b}$$

Bevor wir die Aufstellung der von der Zeit abhängigen Elastizitätsbedingungen vornehmen, seien kurz vollständigkeitshalber die Grundbegriffe des Kriechens erwähnt.

Nach *F. Dischinger* gilt für jede „freie" Formänderung des Betons die Beziehung

$$v_{iq}^{\tau t} = v_{iq}^{00}\left(\frac{1}{1+\varphi_\tau} + \varphi_t - \varphi_\tau\right). \tag{3}$$

Unter „freier" Formänderung ist jene zu verstehen, die durch ihre zeitliche Änderung keine neuen Kräfte hervorruft, welche auf sie rückwirken könnten, z. B. die Formänderungen aller statisch bestimmter Systeme. In (3) bedeutet v_{iq}^{00} die Formänderung im Punkte i, gemessen im Zeitpunkt 0 und hervorgerufen von der Ursache q, welche im Zeitpunkt 0 wirkt, und $v_{iq}^{\tau t}$ dieselbe Formänderung im Zeitpunkt t wegen der Ursache q, wirkend vom Zeitpunkt τ an.

Außerdem stellt q_τ das Kriechmaß dar und $1 + \psi_\tau$ ist die Verhältniszahl der federnden Elastizitätsmoduli des Betons in den Zeitpunkten τ und 0. Im Weiteren wird um die Integrationen der Differentialgleichungen zu ermöglichen, für ψ_τ ein ähnlicher Verlauf wie der der Funktion des Kriechmaßes q_τ angenommen werden:

$$1 + \psi_\tau = 1 + \delta q_\tau = 1 + \delta q(\tau) ,$$

wobei δ eine Verhältniszahl ist, welche mit den Formänderungsgrößen nicht verwechselt werden darf.

Damit stellt $v_{iq}^{00}/(1 + \psi_\tau)$ die federnde Formänderung im Zeitpunkt τ infolge der Ursache q und $v_{iq}^{00}(q_t - \psi_\tau)$ den Zuwachs dieser Formänderung infolge Kriechens von Zeitpunkt τ bis t dar. Die Summe beider gibt die gesamte Formänderung im Zeitpunkt t. Nun betrachten wir die erste Elastizitätsbedingung unseres statisch unbestimmten Systems. Im Zeitpunkt 0 ruft die Überzählige X_{1R}^{00} die „freie" Formänderung im Grundsystem $X_{1R}^{00}\delta_{11} = X_{1R}^{00}\bar{\delta}_{11} + X_{1R}^{00}\bar{\bar{\delta}}_{11}$ hervor. Dieselbe Formänderung im Zeitpunkt t muß gemäß (3) auf $X_{1R}^{00}\bar{\delta}_{11}(1 + q_t) + X_{1R}^{00}\bar{\bar{\delta}}_{11} = X_{1R}^{00}[\bar{\delta}_{11}(1 + q_t) + \bar{\bar{\delta}}_{11}]$ angewachsen sein. Ähnliche Ausdrücke bekommt man für die Formänderungen infolge der übrigen Überzähligen und der ständigen Last. Die Formänderungsgröße $\delta_{1w} = \Delta l_1$ infolge Widerlagerausweichens bleibt unverändert. Das Schwinden setzt gleichzeitig mit dem Kriechen an, und das Schwindmaß ε_s wird zeitlich proportional dem Kriechmaß q_t angenommen. Wenn wir mit m das Endkriechmaß bezeichnen, so gilt

$$\delta_{1s}^{0t} = \frac{q_t}{m}\delta_{1s}^{00} = \frac{q_t}{m}\bar{\delta}_{1s} .$$

Hiermit wird die Gesamtformänderung im Zeitpunkt t

$$X_{1R}^{00}[\bar{\delta}_{11}(1 + q_t) + \bar{\bar{\delta}}_{11}] + X_{2R}^{00}[\bar{\delta}_{12}(1 + q_t) + \bar{\bar{\delta}}_{12}] + X_{3R}^{00}[\bar{\delta}_{13}(1 + q_t) + \bar{\bar{\delta}}_{13}]$$
$$+ [\bar{\delta}_{1g}(1 + q_t) + \bar{\bar{\delta}}_{1g}] + \Delta l_1 + \frac{q_t}{m}\delta_{1s}$$
$$= \left(X_{1R}^{00}\bar{\delta}_{11} + X_{2R}^{00}\bar{\delta}_{12} + X_{3R}^{00}\bar{\delta}_{13} + \bar{\delta}_{1g} + \frac{\bar{\delta}_{1s}}{m}\right)q_t ,$$

mit $R = g + w$. Dieser Ausdruck ist im allgemeinen verschieden von Null. Nun werden durch das Kriechen die neuen mit der Zeit veränderlichen Überzähligen Y_{iq}^{0t} hervorgerufen. Im Augenblick τ wächst die Überzählige Y_1 um das Maß $(dY_1/d\tau)$. Dieser Zuwachs der Kraft ruft eine federnde Formänderung im selben Augenblick hervor:

$$\frac{\bar{\delta}_{11}}{1 + \psi_\tau}\frac{dY_1}{d\tau}d\tau + \bar{\bar{\delta}}_{11}\frac{dY_1}{d\tau}d\tau ,$$

welche bis zum Augenblick t gemäß (3) auf

$$\left[\frac{\bar{\delta}_{11}}{1 + \psi_\tau} + \bar{\delta}_{11}(q_t - q_\tau)\right]\frac{dY_1}{d\tau}d\tau + \bar{\bar{\delta}}_{11}\frac{dY_1}{d\tau}d\tau$$

anwächst. Durch Integration im Zeitintervall von 0 bis t bekommen wir die gesamte Formänderung infolge Y_1. Ähnliche Ausdrücke folgen aus Y_2 und Y_3. Wir erhalten demnach für die Ermittlung der Kriecheinflüsse folgende Gleichung:

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{11}\left(\frac{1}{1 + \psi_\tau} + q_t - q_\tau\right) + \bar{\bar{\delta}}_{11}\right]\frac{dY_1}{d\tau}d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{12}\left(\frac{1}{1 + \psi_\tau} + q_t - q_\tau\right) + \bar{\bar{\delta}}_{12}\right]\frac{dY_2}{d\tau}d\tau$$
$$+ \int_{\tau=0}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{13}\left(\frac{1}{1 + \psi_\tau} + q_t - q_\tau\right) + \bar{\bar{\delta}}_{13}\right]\frac{dY_3}{d\tau}d\tau + \left(X_{1R}^{00}\bar{\delta}_{11} + X_{2R}^{00}\bar{\delta}_{12} + X_{3R}^{00}\bar{\delta}_{13} + \bar{\delta}_{1g}\frac{\delta_{1s}}{m}\right) = 0 .$$

Durch Differentiation dieser Integrodifferenzialgleichung unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der oberen Integrationsgrenze erhalten wir die erste Differentialgleichung des

Systems. In gleicher Weise ergeben sich die beiden übrigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{11}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{11}\right)\frac{dY_1}{d\varphi}+\bar{\delta}_{11}\,Y_1\right]+\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{12}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{12}\right)\frac{dY_2}{d\varphi}+\bar{\delta}_{12}\,Y_2\right]+\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{13}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{13}\right)\frac{dY_3}{d\varphi}+\bar{\delta}_{13}\,Y_3\right]\\
&\qquad+X^{00}_{1R}\bar{\delta}_{11}+X^{00}_{2R}\bar{\delta}_{12}+X^{00}_{3R}\bar{\delta}_{13}+\bar{\delta}_{1g}+\frac{\bar{\delta}_{1s}}{m}=0\,,\\
&\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{21}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{21}\right)\frac{dY_1}{d\varphi}+\bar{\delta}_{21}\,Y_1\right]+\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{22}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{22}\right)\frac{dY_2}{d\varphi}+\bar{\delta}_{22}\,Y_2\right]+\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{23}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{23}\right)\frac{dY_3}{d\varphi}+\bar{\delta}_{23}\,Y_3\right]\\
&\qquad+X^{00}_{1R}\bar{\delta}_{21}+X^{00}_{2R}\bar{\delta}_{22}+X^{00}_{3R}\bar{\delta}_{23}+\bar{\delta}_{2g}+\frac{\bar{\delta}_{2s}}{m}=0\,,\\
&\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{31}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{31}\right)\frac{dY_1}{d\varphi}+\bar{\delta}_{31}\,Y_1\right]+\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{32}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{32}\right)\frac{dY_2}{d\varphi}+\bar{\delta}_{32}\,Y_2\right]+\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{33}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{33}\right)\frac{dY_3}{d\varphi}+\bar{\delta}_{33}\,Y_3\right]\\
&\qquad+X^{00}_{1R}\bar{\delta}_{31}+X^{00}_{2R}\bar{\delta}_{32}+X^{00}_{3R}\bar{\delta}_{33}+\bar{\delta}_{3g}+\frac{\bar{\delta}_{3s}}{m}=0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Bevor wir zur Untersuchung des allgemeinen Falles übergehen, sei hier kurz auf die Lösung von *F. Dischinger*[1] für den Fall einer statisch unbestimmten reinen Betonkonstruktion hingewiesen. Es ist dann $\bar{\bar{\delta}}_{ik}=0$ und $\bar{\delta}_{ik}=\delta_{ik}$; demnach wird ein beliebiger Klammerausdruck des Differentialsystems (4)

$$\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{ik}}{1+\psi}+\bar{\bar{\delta}}_{ik}\right)\frac{dY_k}{d\varphi}+\bar{\delta}_{ik}\,Y_k\right]=\left[\frac{1}{1+\psi}\,\frac{dY_k}{d\varphi}+Y_k\right]\delta_{ik}\,.$$

Wir lösen nun das System nach den drei unbekannten, in den Klammern stehenden Ausdrücken auf und erhalten damit drei voneinander unabhängige Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{1+\psi}\,\frac{dY_i}{d\varphi}+Y_i+\left(X^{00}_{iw}-\frac{1}{m}\,X^{00}_{is}\right)=0\qquad(i=1,2,3)\,.$$

Für den Ansatz $E^t_b=E^0_b\,(1+\psi_t)=E^0_b\,(1+\delta\,\varphi)$ lautet die Lösung dieser Differentialgleichungen

$$Y^{0t}_i=\left(\frac{X^{00}_{1s}}{m}-X^{00}_{iw}\right)[1-e^{-\varphi(1+\delta\varphi/2)}]\qquad(i=1,2,3)\,.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß die Überzähligen aus ständiger Last durch das Kriechen nicht beeinflußt werden, während jene aus Widerlagerverschiebung und Schwinden sich mit der Zeit ändern; und zwar ändert sich zeitlich jede Überzählige unabhängig von den übrigen, und der Einfluß der Zeit drückt sich durch eine einzige Zeitfunktion $e^{-\varphi(1+\delta\varphi/2)}$ für alle drei Überzähligen aus.

Im allgemeinen Fall $\bar{\bar{\delta}}_{ik}\neq 0$ ist die Spaltung des Differentialsystems (4) nicht möglich. Wir bekommen eine partikuläre Lösung des Systems, wenn wir $Y_i=y_i=$ konst. einsetzen. Dann erfüllen die y_i folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\delta}_{11}\,y_1+\bar{\delta}_{12}\,y_2+\bar{\delta}_{13}\,y_3+X^{00}_{1R}\bar{\delta}_{11}+X^{00}_{2R}\bar{\delta}_{12}+X^{00}_{3R}\bar{\delta}_{13}+\bar{\delta}_{1g}+\frac{\bar{\delta}_{1s}}{m}=0\,,\\
&\bar{\delta}_{21}\,y_1+\bar{\delta}_{22}\,y_2+\bar{\delta}_{23}\,y_3+X^{00}_{1R}\bar{\delta}_{21}+X^{00}_{2R}\bar{\delta}_{22}+X^{00}_{3R}\bar{\delta}_{23}+\bar{\delta}_{2g}+\frac{\bar{\delta}_{2s}}{m}=0\,,\\
&\bar{\delta}_{31}\,y_1+\bar{\delta}_{32}\,y_2+\bar{\delta}_{33}\,y_3+X^{00}_{1R}\bar{\delta}_{31}+X^{00}_{2R}\bar{\delta}_{32}+X^{00}_{3R}\bar{\delta}_{33}+\bar{\delta}_{3g}+\frac{\bar{\delta}_{3s}}{m}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

oder

$$y_1=-X^{00}_{1R}-\frac{D_{1g}}{D}-\frac{1}{m}\,\frac{D_{1s}}{D}\,,$$

$$y_2=-X^{00}_{2R}-\frac{D_{2g}}{D}-\frac{1}{m}\,\frac{D_{2s}}{D}\,,$$

$$y_3=-X^{00}_{3R}-\frac{D_{3g}}{D}-\frac{1}{m}\,\frac{D_{3s}}{D}\,,$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 323.

wobei $\bar{D}$, $\bar{D}_{ig}$, $\bar{D}_{is}$ die Determinanten des Systems (5) sind. Um die allgemeine Lösung des dem System (4) entsprechenden homogenen Differentialsystems zu bekommen, setzen wir

$$Y_k = K_k\, e^{\alpha\varphi}\,(1+\beta\varphi)^{\gamma} \qquad (K_k = \text{konst.}) \tag{6a}$$

ein.

Damit wird ein beliebiger Klammerausdruck

$$\left[\left(\frac{\bar{\delta}_{ik}}{1+\delta\varphi}+\bar{\bar{\delta}}_{ik}\right)\frac{dY_k}{d\varphi}+\bar{\delta}_{ik}\,Y_k\right]$$
$$= K_k\,(\bar{\delta}_{ik}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{ik})\,\frac{\beta\,\delta\varphi^2+(\beta+\delta+\alpha\beta)\varphi+(\alpha+\beta\gamma+1)}{\beta\,\delta\varphi^2+(\beta+\delta)\varphi+1}\,e^{\alpha\varphi}(1+\beta\varphi)^{\gamma} \tag{6b}$$

mit

$$\hat{\lambda}=\frac{\alpha\beta\,\delta\varphi^2+(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\gamma\delta)\varphi+(\alpha+\beta\gamma)}{\beta\,\delta\varphi^2+(\beta+\delta+\alpha\beta)\varphi+(\alpha+\beta\gamma+1)}\,.$$

Wenn nun die in den Klammern stehenden Ausdrücke des homogenen Differentialsystems durch den rechten Teil von (6b) ersetzt werden und alle Gleichungen durch den für alle Glieder gemeinsamen Bruch sowie durch die Funktion $e^{\alpha\varphi}(1+\beta\varphi)^{\gamma}$ dividiert werden, ergibt sich zur Bestimmung der Konstanten K_k folgendes lineares System:

$$\left.\begin{aligned}
K_1\,(\bar{\delta}_{11}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{11})+K_2\,(\bar{\delta}_{12}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{12})+K_3\,(\delta_{13}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{13})&=0\,,\\
K_1\,(\bar{\delta}_{21}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{21})+K_2\,(\delta_{22}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{22})+K_3\,(\bar{\delta}_{23}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{23})&=0\,,\\
K_1\,(\bar{\delta}_{31}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{31})+K_2\,(\bar{\delta}_{32}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{32})+K_3\,(\bar{\delta}_{33}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{33})&=0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Vorzahlen K_i sind unabhängig von φ, wenn $\hat{\lambda}$ auch unabhängig von φ ist. Daher müssen α, β, γ folgenderweise gewählt werden:

$$\hat{\lambda}=\frac{\alpha\beta\,\delta}{\beta\,\delta}=\frac{\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\gamma\delta}{\beta+\delta+\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta\gamma}{\alpha+\beta\gamma+1}$$

und

$$\alpha=\hat{\lambda}, \qquad \beta=\frac{\delta}{1-\hat{\lambda}}, \qquad \gamma=\frac{\hat{\lambda}^2}{\delta}\,.$$

Das lineare System (7) ist homogen und besitzt eine Lösung, wenn die Determinante der Vorzahlen von K gleich Null ist:

$$D(\hat{\lambda})=\begin{vmatrix}
\bar{\delta}_{11}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{11} & \bar{\delta}_{12}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{12} & \bar{\delta}_{13}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{13}\\
\bar{\delta}_{21}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{21} & \bar{\delta}_{22}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{22} & \bar{\delta}_{23}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{23}\\
\bar{\delta}_{31}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{31} & \bar{\delta}_{32}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{32} & \bar{\delta}_{33}+\hat{\lambda}\,\bar{\bar{\delta}}_{33}
\end{vmatrix}=0\,. \tag{8a}$$

Dies ist die charakteristische Gleichung des Differentialsystems und liefert im allgemeinen drei Werte $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$, damit auch drei Grundlösungen

$$\Phi=\Phi^{i}_{\hat{\lambda}}=e^{\hat{\lambda}\varphi_i}\left(1+\frac{\delta\varphi_i}{1-\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\lambda}^2/\delta}. \tag{8b}$$

Für einen bestimmten Wert $\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_\varrho$ bekommen wir aus dem homogenen System (7)

$$K_1=M_{11}(\hat{\lambda}_\varrho)\,C_\varrho\,, \qquad K_2=M_{12}(\hat{\lambda}_\varrho)\,C_\varrho\,, \qquad K_3=M_{13}(\hat{\lambda}_\varrho)\,C_\varrho\,,$$

wobei $M_{1k}(\hat{\lambda}_\varrho)$ der Minor des Elementen $\bar{\delta}_{1k}+\hat{\lambda}_\varrho\bar{\bar{\delta}}_{1k}$ der Determinante (8a) für $\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_\varrho$ und C_ϱ eine noch aus den Randbedingungen des Problems zu bestimmenden Konstante ist, welche der Wurzel $\hat{\lambda}_\varrho$ zugeordnet ist.

Durch Addition aller Grundlösungen von (6a) ergibt sich die allgemeine Lösung des homogenen Differentialsystems, welche lautet

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_1&=\Phi_{\lambda 1}\,M_{11}(\hat{\lambda}_1)\cdot C_1+\Phi_{\lambda 2}\,M_{11}(\hat{\lambda}_2)\cdot C_2+\Phi_{\lambda 3}\,M_{11}(\hat{\lambda}_3)\,C_3\,,\\
\mathfrak{Y}_2&=\Phi_{\lambda 1}\,M_{12}(\hat{\lambda}_1)\cdot C_1+\Phi_{\lambda 2}\,M_{12}(\hat{\lambda}_2)\cdot C_2+\Phi_{\lambda 3}\,M_{12}(\hat{\lambda}_3)\,C_3\,,\\
\mathfrak{Y}_3&=\Phi_{\lambda 1}\,M_{13}(\hat{\lambda}_1)\cdot C_1+\Phi_{\lambda 2}\,M_{13}(\hat{\lambda}_2)\cdot C_2+\Phi_{\lambda 3}\,M_{13}(\hat{\lambda}_3)\,C_3\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

Hiermit folgt die Lösung des inhomogenen Differentialsystems zu

$$Y^{0i}_1=y_1+\mathfrak{Y}_1 \qquad Y^{0i}_2=y_2+\mathfrak{Y}_2 \qquad Y^{0i}_3=y_3+\mathfrak{Y}_3\,. \tag{9b}$$

Diese Gleichungen enthalten die drei Konstanten C_ϱ, welche sich aus der Anfangsbedingung bestimmen lassen. Es müssen am Beginn des Kriechens, d. h. für $t = 0$ bzw. $\varphi = 0$ die Überzähligen Y_i gleich Null sein. Damit folgt zur Bestimmung von C_ϱ folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} M_{11}(\lambda_1)\,C_1 + M_{11}(\lambda_2)\,C_2 + M_{11}(\lambda_3)\,C_3 &= -\,y_1 = X_{1R}^{00} + \frac{D_{1g}}{D} + \frac{1}{m}\,\frac{D_{1s}}{D}\,,\\ M_{12}(\lambda_1)\,C_1 + M_{12}(\lambda_2)\,C_2 + M_{12}(\lambda_3)\,C_3 &= -\,y_2 = X_{2R}^{00} + \frac{D_{2g}}{D} + \frac{1}{m}\,\frac{D_{2s}}{D}\,,\\ M_{13}(\lambda_1)\,C_1 + M_{13}(\lambda_2)\,C_2 + M_{13}(\lambda_3)\,C_3 &= -\,y_3 = X_{3R}^{00} + \frac{D_{3g}}{D} + \frac{1}{m}\,\frac{D_{3s}}{D}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9c}$$

Setzt man die Werte von C in Y_i ein und addiert diese zu den X_i^{00}, so erhält man gemäß (2) die endgültigen Werte der Überzähligen im Zeitpunkt t.

Bis jetzt wurden Belastungen untersucht, welche gleichzeitig mit dem Beginn des Kriechens auferlegt werden. Nun wollen wir den Fall einer ständigen Last p untersuchen, welche in einem späteren Zeitpunkt $t = t_\lambda$ zu wirken beginnt.

Die Überzähligen $X_{ip}^{\lambda\lambda}$ im Zeitpunkt t_λ ergeben sich aus dem System (1), wenn die Formänderungsgrößen $\delta_{ik}^{00} = \delta_{ik}$ durch

$$\delta_{ik}^{\lambda\lambda} = \frac{\overline{\delta}_{ik}}{1 + \varphi_\lambda} + \overline{\overline{\delta}}_{ik}$$

ersetzt werden.

Die Integralgleichungen des Kriechens folgen ähnlich wie im Falle $t_\lambda = 0$, mit dem Unterschied, daß die untere Integrationsgrenze $\tau = 0$ aller Integrale durch $\tau = t_\lambda$, X_{ip}^{00} durch $X_{ip}^{\lambda\lambda}$ und $\varphi_t = 0$ durch $\varphi_t - \varphi_\lambda$ ersetzt werden müssen. Durch Differentiation dieser Gleichungen bekommen wir ein System von Differentialgleichungen, welches sich von System (4) nur um die Glieder X_{ip}^{00} unterscheidet, die durch $X_{ip}^{\lambda\lambda}$ ersetzt worden sind. Damit lautet die partikuläre Lösung

$$y_1^\lambda = -\,X_{1p}^{\lambda\lambda} - \frac{D_{1p}}{D}\,, \qquad y_2^\lambda = -\,X_{2p}^{\lambda\lambda} - \frac{D_{2p}}{D}\,, \qquad y_3^\lambda = -\,X_{3p}^{\lambda\lambda} - \frac{D_{3p}}{D}\,.$$

Die Lösung des homogenen Differentialsystems wird in der folgenden Form angeschrieben:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{\lambda t} &= \frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}\,M_{11}(\lambda_1)\,C_1 + \frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda}\,M_{11}(\lambda_2)\,C_2 + \frac{\Phi_3^t}{\Phi_3^\lambda}\,M_{11}(\lambda_3)\,C_3\,,\\ y_2^{\lambda t} &= \frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}\,M_{12}(\lambda_1)\,C_1 + \frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda}\,M_{12}(\lambda_2)\,C_2 + \frac{\Phi_3^t}{\Phi_3^\lambda}\,M_{12}(\lambda_3)\,C_3\,,\\ y_3^{\lambda t} &= \frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}\,M_{13}(\lambda_1)\,C_1 + \frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda}\,M_{13}(\lambda_2)\,C_2 + \frac{\Phi_3^t}{\Phi_3^\lambda}\,M_{13}(\lambda_3)\,C_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{9d}$$

Die C_1, C_2, C_3 folgen aus der Randbedingung $t = t_\lambda$, $Y_1^{\lambda t} = Y_2^{\lambda t} = Y_3^{\lambda t} = 0$ und erfüllen die Gleichungen (9c), wobei die X^{00} durch $X^{\lambda\lambda}$ ersetzt sind.

Nun betrachten wir die charakteristische Gleichung des Differentialsystems. Für $\lambda = +1$ wird $D(\lambda)$ gleich der Determinante D des Systems (1), welche bekanntlich immer positiv ist. Daraus folgt, daß Gleichung (8a) nur negative Wurzeln besitzen kann. Sollte eine positive Wurzel $\lambda = \varrho$ existieren, so könnte man ein statisch unbestimmtes System konstruieren, dessen Betonsteifigkeit gleich jener des ursprünglichen Systems, und bei dem die Stahlsteifigkeit mit ϱ dividiert ist. Die Determinante der Vorzahlen dieses Systems wäre dann gleich dem $D(\varrho)$, also gleich Null.

Der größte Wert λ ist gleich Null und wird erreicht, wenn die Betonsteifigkeit unendlich groß bzw. $\overline{\delta} = 0$ ist, während der kleinste Wert $\lambda = -\infty$ ist und sich ergibt, wenn die Stahlsteifigkeit unendlich groß wird. Für $\lim \lambda \to -\infty$ folgt

$$\Phi_\infty = \lim_{\lambda \to -\infty} e^{\varphi\lambda}\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda}\right)^{\frac{\lambda^2}{\delta}} = \lim e^{\varphi\lambda + \frac{\lambda^2}{\delta}\ln\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda}\right)} = \lim e^{\varphi\lambda + \frac{\lambda^2}{\delta}\left[\frac{\delta\varphi}{1-\lambda} - \dots\right]} = e^{-\varphi\left(1 + \frac{\delta\varphi}{2}\right)}\,, \tag{10a}$$

also das bekannte Kriechintegral der reinen Betonkonstruktionen.

Der Grad der charakteristischen Gleichung kann höchstens gleich dem Grad der statischen Unbestimmtheit des Systems sein. Wenn z. B. in einer r-fach statisch unbestimmten Kon-

struktion die durch das Vorhandensein der Stahltragteile bedingte Unbestimmtheit μ-ten Grades ist und $X_1, X_2 \ldots . X_\mu$ die entsprechenden Überzähligen sind, wird für i oder $k > \mu$ $\delta_{ik} = 0$. Damit ergibt sich eine charakteristische Gleichung μ-ten Grades mit μ regulären Wurzel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ und einer entarteten $\lambda = -\infty$.

Wenn die Veränderlichkeit des federnden Elastizitätsmoduls nicht berücksichtigt wird und $\psi = 0$ bzw. $\delta = 0$ gesetzt wird, ändert sich in den allgemeinen Lösungen (9a) nur der funktionelle Teil. Es wird hiermit

$$\Phi_{\delta=0} = \lim_{\delta \to 0} e^{\varphi\lambda}\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}} = e^{\varphi\lambda} \lim_{\delta \to 0}\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda}\right)^{\frac{1-\lambda}{\delta\varphi}\frac{\varphi\lambda}{1-\lambda}} = e^{\varphi\lambda} \cdot e^{\frac{\varphi\lambda}{1-\lambda}} = e^{\varphi\frac{\lambda}{1-\lambda}}. \quad (10b)$$

Die Funktion Φ, bestimmt durch (8b), enthält als Variable das Kriechmaß φ und noch die Parameter λ. Bei geeigneter Wahl von λ erfüllt die Funktion Φ jede Differentialgleichung des Kriechproblems. Wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Kriechprobleme wird Φ weiterhin Kriechintegral genannt und mit zwei Indices versehen. Der obere bezieht sich auf das Kriechmaß φ_t bzw. die Zeit t, während der untere auf den Wert des Parameters λ.

Das Ergebnis der Untersuchung kann folgendermaßen zusammengefaßt werden. Bei statisch unbestimmten Betonkonstruktionen, welche Tragglieder aus Stahl besitzen, ändert sich zeitlich die Größe der Überzähligen aus ständiger Last, Widerlagerverschiebung und Schwinden, und zwar hängt ihr jeweiliger Wert nicht nur vom Anfangswert der entsprechenden Überzähligen ab, wie bei den reinen Betonkonstruktionen, sondern auch von den Anfangswerten aller übrigen Überzähligen ab. Der Einfluß der Zeit ergibt sich durch eine Anzahl von Kriechintegralen, welche im Aufbau alle gleich sind und nur von einem Parameter abhängen. Ihre Anzahl ist gleich dem Grad der durch die Stahltragteile bedingten statischen Unbestimmtheit plus eins. Ein Durchlaufträger aus Beton über vier Öffnungen mit zwei Zugbändern gibt zum Beispiel zwei reguläre Kriechintegrale für die statische Unbestimmtheit infolge der Zugbänder und eines Φ für die Unbestimmtheit der Betonkonstruktion, also insgesamt drei Funktionen trotz der fünffachen statischen Unbestimmtheit des Systems.

Im Gegensatz zu der „freien" Formänderung ändern sich zeitlich bei „behinderter" Formänderung nicht nur der Modul des Materials, sondern auch die Kräfte, durch welche diese hervorgerufen wird. Letztgenannte sind Formänderungen der statisch unbestimmten Betonkonstruktionen.

Betrachten wir nun eine Deformation δ^{00}_{vp} des Punktes v infolge der Ursache p, so ist

$$\delta^{00}_{vp} = \delta^{0\,\prime}_{vp\,0} + \delta^{00}_{v1} X^{0\,0}_{1p} + \delta^{00}_{v2} X^{00}_{2p} + \delta^{00}_{v3} X^{00}_{3p},$$

wobei $\delta^{00}_{vp\,0}$ die Deformation des statisch bestimmten Systems infolge der äußeren Belastung und δ^{00}_{v1}, δ^{00}_{v2}, δ^{00}_{v3} dieselbe Deformation infolge der Grundbelastungen X_1, X_2, $X_3 = +1$ ist. Die Größen δ_v setzen sich wie sonst aus zwei Teilen $\bar{\delta}_v$ und $\bar{\bar{\delta}}_v$ zusammen. Es soll nun die Deformation $\delta^{\lambda t}_{vp}$ im Zeitpunkt t berechnet werden, wenn die Belastung p im Zeitpunkt t_λ auferlegt wird.

Im Zeitpunkt t_λ des Auferlegens der Belastung ist die Deformation

$$\delta^{\lambda t}_{vp} = \frac{1}{1+\varphi_\lambda}(\bar{\delta}_{vp\,0} + \bar{\delta}_{v1} X^{\lambda\lambda}_{1p} + \bar{\delta}_{v2} X^{\lambda\lambda}_{2p} + \bar{\delta}_{v3} X^{\lambda\lambda}_{3p}) + (\bar{\bar{\delta}}_{vp\,0} + \bar{\bar{\delta}}_{v1} X^{\lambda\lambda}_{1p} + \bar{\bar{\delta}}_{v2} X^{\lambda\lambda}_{2p} + \bar{\bar{\delta}}_{v3} X^{\lambda\lambda}_{3p}),$$

und im Zeitpunkt t wird

$$\left(\frac{1}{1+\varphi_\lambda} + \varphi_t - \varphi_\lambda\right)(\bar{\delta}_{vp\,0} + \bar{\delta}_{v1} X^{\lambda\lambda}_{1p} + \bar{\delta}_{v2} X^{\lambda\lambda}_{2p} + \bar{\delta}_{v3} X^{\lambda\lambda}_{3p}) + (\bar{\bar{\delta}}_{vp\,0} + \bar{\bar{\delta}}_{v1} X^{\lambda\lambda}_{1p} + \bar{\bar{\delta}}_{v2} X^{\lambda\lambda}_{2p} + \bar{\bar{\delta}}_{v3} X^{\lambda\lambda}_{3p}). \quad (11a)$$

Die mit dem Kriechen entstehenden Überzähligen Y_1, Y_2, Y_3 rufen eine zusätzliche Deformation hervor:

$$\int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{v1}\left(\frac{1}{1+\varphi_\tau} + \varphi_t - \varphi_\tau\right) + \bar{\bar{\delta}}_{v1}\right]\frac{dY_1}{d\tau}d\tau + \int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{v2}\left(\frac{1}{1+\varphi_\tau} + \varphi_t - \varphi_\tau\right) + \bar{\bar{\delta}}_{v2}\right]\frac{dY_2}{d\tau}d\tau + \int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{v3}\left(\frac{1}{1+\varphi_\tau} + \varphi_t - \varphi_\tau\right) + \bar{\bar{\delta}}_{v3}\right]\frac{dY_3}{d\tau}d\tau. \quad (11b)$$

Unter Benützung von (9b) und (9d) läßt sich ein beliebiges Integral, z. B. das zweite, folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{v2}\left(\frac{1}{1+\varphi_\tau}+\varphi_t-\varphi_\tau\right)+\bar{\bar{\delta}}_{v2}\right]\frac{dY_2}{d\tau}\,d\tau$$

$$=\int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{v2}\left(\frac{1}{1+\varphi_\tau}+\varphi_t-\varphi_\tau\right)+\bar{\bar{\delta}}_{v2}\right]\left[M_{12}(\lambda_1)\frac{C_1}{\Phi_1^\lambda}\frac{d\Phi_1^\tau}{d\tau}+M_{12}(\lambda_2)\frac{C_2}{\Phi_2^\lambda}\frac{d\Phi_2^\tau}{d\tau}+M_{13}(\lambda_3)\frac{C_3}{\Phi_3^\lambda}\frac{d\Phi_3^\tau}{d\tau}\right]d\tau\,.$$

Dieser Ausdruck zerlegt sich in drei Teilintegrale; davon ist das erste

$$\int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\left[\bar{\delta}_{v2}\left(\frac{1}{1+\varphi_\tau}+\varphi_t-\varphi_\tau\right)+\bar{\bar{\delta}}_{v2}\right]M_{12}(\lambda_1)\frac{C_1}{\Phi_1^\lambda}\frac{d\Phi_1^\tau}{d\tau}\,d\tau\quad.$$

$$=M_{12}(\lambda_1)\,C_1\left[\frac{\bar{\delta}_{v2}}{\Phi_1^\lambda}\int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\frac{1}{1+\varphi_\tau}\frac{d\Phi_1^\tau}{d\tau}\,d\tau+\bar{\delta}_{v2}\,\varphi_t\left(\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}-1\right)-\frac{\bar{\delta}_{v2}}{\Phi_1^\lambda}\int_{\tau=t_\lambda}^{\tau=t}\varphi_\tau\frac{d\Phi_1^\tau}{d\tau}\,d\tau+\bar{\bar{\delta}}_{v2}\left(\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}-1\right)\right]$$

$$=M_{12}(\lambda_1)\,C_1\left[\frac{1}{\lambda_1}(\bar{\delta}_{v2}+\lambda_1\bar{\bar{\delta}}_{v2})\left(\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}-1\right)-\bar{\delta}_{v2}(\varphi_t-\varphi_\lambda)\right],$$

da

$$\frac{d\Phi}{d\varphi}=\lambda\frac{1+\varphi}{1+\varphi-\lambda}\Phi\,.$$

Ähnlich rechnet man die übrigen Integrale aus, welche eingesetzt in (11b) und entsprechend umgeordnet liefern:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}-1\right)\frac{C_1}{\lambda_1}[M_{11}(\lambda_1)(\bar{\delta}_{v1}+\lambda_1\bar{\bar{\delta}}_{v1})+M_{12}(\lambda_1)(\bar{\delta}_{v2}+\lambda_1\bar{\bar{\delta}}_{v2})+M_{13}(\lambda_1)(\bar{\delta}_{v3}+\lambda_1\bar{\bar{\delta}}_{v3})]\\
&+\left(\frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda}-1\right)\frac{C_2}{\lambda_2}[M_{11}(\lambda_2)(\bar{\delta}_{v1}+\lambda_2\bar{\bar{\delta}}_{v1})+M_{12}(\lambda_2)(\bar{\delta}_{v2}+\lambda_2\bar{\bar{\delta}}_{v2})+M_{13}(\lambda_2)(\bar{\delta}_{v3}+\lambda_2\bar{\bar{\delta}}_{v3})]\\
&+\left(\frac{\Phi_3^t}{\Phi_3^\lambda}-1\right)\frac{C_3}{\lambda_3}[M_{11}(\lambda_3)(\bar{\delta}_{v1}+\lambda_3\bar{\bar{\delta}}_{v1})+M_{12}(\lambda_3)(\bar{\delta}_{v2}+\lambda_3\bar{\bar{\delta}}_{v2})+M_{13}(\lambda_3)(\bar{\delta}_{v3}+\lambda_3\bar{\bar{\delta}}_{v3})]\\
&-(\varphi_t-\varphi_\lambda)\,\bar{\delta}_{v1}[M_{11}(\lambda_1)\,C_1+M_{11}(\lambda_2)\,C_2+M_{11}(\lambda_3)\,C_3]\\
&-(\varphi_t-\varphi_\lambda)\,\bar{\delta}_{v2}[M_{12}(\lambda_1)\,C_1+M_{12}(\lambda_2)\,C_2+M_{12}(\lambda_3)\,C_3]\\
&-(\varphi_t-\varphi_\lambda)\,\bar{\delta}_{v3}[M_{13}(\lambda_1)\,C_1+M_{13}(\lambda_2)\,C_2+M_{13}(\lambda_3)\,C_3]\,.
\end{aligned}\qquad(11c)$$

Wir bezeichnen mit $D_v(\lambda)$ die Determinante welche aus (8a) entsteht, wenn die Glieder $\bar{\lambda}_{1k}+\bar{\bar{\lambda}}\delta_{1k}$ der ersten Reihe durch $\delta_{vk}+\lambda\,\delta_{vk}$ ersetzt werden. Dann sind die drei ersten Klammerausdrücke gleich $D_v(\lambda_1)$, $D_v(\lambda_2)$ und $D_v(\lambda_3)$. Die drei letzten Klammerausdrücke sind gleich dem rechten Glied von (9c), wobei X^{00} durch $X^{\alpha\alpha}$ ersetzt wird. Damit folgt für den Ausdruck (11c)

$$\left(\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}-1\right)\frac{C_1}{\lambda_1}D_v(\lambda_1)+\left(\frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda}-1\right)\frac{C_2}{\lambda_2}D_v(\lambda_2)+\left(\frac{\Phi_3^t}{\Phi_3^\lambda}-1\right)\frac{C_3}{\lambda_3}D_v(\lambda_3)$$

$$-(\varphi_t-\varphi_\lambda)\left[(\bar{\delta}_{v1}X_{1p}^{\alpha\alpha}+\bar{\delta}_{v2}X_{2p}^{\alpha\alpha}+\bar{\delta}_{v3}X_{3p}^{\alpha\alpha})+\frac{1}{D}(\bar{\delta}_{v1}\bar{D}_{1p}+\bar{\delta}_{v2}\bar{D}_{2p}+\bar{\delta}_{v3}\bar{D}_{3p})\right].$$

Dies addiert in (11a) gibt die Gesamtformänderung im Zeitpunkt t zu

$$\delta_{vp}^{\alpha t}=\delta_{vp}^{\alpha\alpha}+\left(\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda}-1\right)\frac{C_1}{\lambda_1}D_v(\lambda_1)+\left(\frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda}-1\right)\frac{C_2}{\lambda_2}D_v(\lambda_2)+\left(\frac{\Phi_3^t}{\Phi_3^\lambda}-1\right)\frac{C_3}{\lambda_3}D_v(\lambda_3)$$

$$+(\varphi_t-\varphi_\lambda)\frac{1}{D}(\bar{\delta}_{vp}\bar{D}-\bar{\delta}_{v1}\bar{D}_{1p}-\bar{\delta}_{v2}\bar{D}_{2p}-\bar{\delta}_{v3}\bar{D}_{3p})\,.\qquad(12)$$

Wenn der Punkt v mit einem der drei ausgezeichneten Angriffspunkte der Überzähligen zusammenfällt, wird dieser Ausdruck, wie zu erwarten ist, gleich Null.

3. Ermittlung der Überzähligen eines zweifachen statisch unbestimmten Systems. Es werden im weiteren die Formeln für die Eigengewichtbelastung, für Schwinden und ständige Last, aufgebracht im Zeitpunkt $t=t_\alpha$, abgeleitet.

a) **Eigengewicht.** Die Überzähligen aus Eigengewicht im Zeitpunkt $t = 0$ sind

$$X_{1g}^{00} = -\frac{\delta_{1g}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{2g}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}, \qquad X_{2g}^{00} = -\frac{\delta_{11}\delta_{2g} - \delta_{1g}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}. \tag{13a}$$

Die simultanen Differentialgleichungen der durch das Kriechen entstehenden Überzähligen Y_{1g}, Y_{2g} lauten gemäß (4)

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{\bar\delta_{11}}{1+\psi} + \bar{\bar\delta}_{11}\right)\frac{dY_{1g}}{d\varphi} + \bar\delta_{11}\,Y_{1g}\right] + \left[\left(\frac{\bar\delta_{12}}{1+\psi} + \bar{\bar\delta}_{12}\right)\frac{dY_{2g}}{d\varphi} + \bar\delta_{12}\,Y_{2g}\right] + X_{1g}^{00}\,\bar\delta_{11} + X_{2g}^{00}\bar\delta_{12} + \bar\delta_{1g} = 0\,,\\ \left[\left(\frac{\bar\delta_{21}}{1+\psi} + \bar{\bar\delta}_{21}\right)\frac{dY_{1g}}{d\varphi} + \bar\delta_{21}\,Y_{1g}\right] + \left[\left(\frac{\bar\delta_{22}}{1+\psi} + \bar{\bar\delta}_{22}\right)\frac{dY_{2g}}{d\varphi} + \bar\delta_{22}\,Y_{2g}\right] + X_{1g}^{00}\bar\delta_{21} + X_{2g}^{00}\bar\delta_{22} + \bar\delta_{2g} = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die partikulären Lösungen y_{1g}, y_{2g} erfüllen folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_{1g}\bar\delta_{11} + y_{2g}\bar\delta_{12} + X_{1g}^{00}\bar\delta_{11} + X_{2g}^{00}\bar\delta_{12} + \bar\delta_{1g} = 0\,,\\ y_{1g}\bar\delta_{21} + y_{2g}\bar\delta_{22} + X_{1g}^{00}\bar\delta_{21} + X_{2g}^{00}\bar\delta_{22} + \bar\delta_{2g} = 0\,;\end{aligned}$$

daraus folgt

$$y_{1g} = -X_{1g}^{00} - \frac{\bar\delta_{1g}\bar\delta_{22} - \bar\delta_{12}\bar\delta_{2g}}{\bar\delta_{11}\bar\delta_{22} - \bar\delta_{12}\bar\delta_{21}}, \qquad y_{2g} = -X_{2g}^{00} - \frac{\bar\delta_{11}\bar\delta_{2g} - \bar\delta_{1g}\bar\delta_{21}}{\bar\delta_{11}\bar\delta_{22} - \bar\delta_{12}\bar\delta_{21}}.$$

Die charakteristische Gleichung des homogenen Differentialsystems lautet nun

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \bar\delta_{11} + \lambda\,\bar{\bar\delta}_{11} & \bar\delta_{12} + \lambda\,\bar{\bar\delta}_{12} \\ \bar\delta_{21} + \lambda\,\bar{\bar\delta}_{21} & \bar\delta_{22} + \lambda\,\bar{\bar\delta}_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(\bar{\bar\delta}_{11}\bar{\bar\delta}_{22} - \bar{\bar\delta}_{12}\bar{\bar\delta}_{21}) + \lambda\,[(\bar\delta_{11}\bar{\bar\delta}_{22} - \bar\delta_{12}\bar{\bar\delta}_{21}) + (\bar{\bar\delta}_{11}\bar\delta_{22} - \bar{\bar\delta}_{12}\bar\delta_{21})] + (\bar\delta_{11}\bar\delta_{22} - \bar\delta_{12}\bar\delta_{21}) = 0\,. \tag{14}$$

Diese besitzt zwei Wurzeln λ_1 und λ_2. Damit ist die allgemeine Lösung

$$\left.\begin{aligned} Y_{1g}^{0t} = y_{1g} + C_{1g}^{0}(\bar\delta_{22} + \lambda_1\bar{\bar\delta}_{22})\,e^{\lambda_1\varphi}\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda_1}\right)^{\lambda_1^2/\delta} + C_{2g}^{0}(\bar\delta_{22} + \lambda_2\bar{\bar\delta}_{22})\,e^{\lambda_2\varphi}\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda_2}\right)^{\lambda_2^2/\delta},\\ Y_{2g}^{0t} = y_{2g} - C_{1g}^{0}(\bar\delta_{21} + \lambda_1\bar{\bar\delta}_{21})\,e^{\lambda_1\varphi}\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda_1}\right)^{\lambda_1^2/\delta} - C_{2g}^{0}(\bar\delta_{21} + \lambda_2\bar{\bar\delta}_{22})\,e^{\lambda_2\varphi}\left(1 + \frac{\delta\varphi}{1-\lambda_2}\right)^{\lambda_2^2/\delta}.\end{aligned}\right| \tag{15a}$$

Die Konstanten C_{1g}^{0} und C_{2g}^{0} lassen sich aus der Anfangsbedingung für $t = 0$ bzw. $\varphi = 0$ bestimmen

$$\begin{aligned} C_{1g}^{0}(\bar\delta_{22} + \lambda_1\bar{\bar\delta}_{22}) + C_{2g}^{0}(\bar\delta_{22} + \lambda_2\bar{\bar\delta}_{22}) + y_{1g} = 0\,,\\ -C_{1g}^{0}(\bar\delta_{21} + \lambda_1\bar{\bar\delta}_{21}) - C_{2g}^{0}(\bar\delta_{21} + \lambda_2\bar{\bar\delta}_{21}) + y_{2g} = 0\,,\end{aligned}$$

also

$$\left.\begin{aligned} C_{1g}^{0} = -\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\bar\delta_{21}\bar{\bar\delta}_{22} - \bar{\bar\delta}_{21}\bar\delta_{22})}\,[y_{1g}(\bar\delta_{21} + \lambda_2\bar{\bar\delta}_{21}) + y_{2g}(\bar\delta_{22} + \lambda_2\bar{\bar\delta}_{22})]\,,\\ C_{2g}^{0} = -\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\bar\delta_{21}\bar{\bar\delta}_{22} - \bar{\bar\delta}_{21}\bar\delta_{22})}\,[y_{1g}(\bar\delta_{21} + \lambda_1\bar{\bar\delta}_{21}) + y_{2g}(\bar\delta_{22} + \lambda_1\bar{\bar\delta}_{22})]\,.\end{aligned}\right| \tag{15b}$$

b) **Schwinden.** Da das Schwinden gleichzeitig mit dem Kriechen einsetzt, ist

$$X_{1s}^{00} = X_{2s}^{00} = 0\,.$$

Der partikuläre Teil der Überzähligen ist

$$y_{1s} = -\frac{1}{m}\,\frac{\bar\delta_{1s}\bar\delta_{22} - \bar\delta_{12}\bar\delta_{2s}}{\bar\delta_{11}\bar\delta_{22} - \bar\delta_{12}\bar\delta_{21}}, \qquad y_{2s} = -\frac{1}{m}\,\frac{\bar\delta_{11}\bar\delta_{2s} - \bar\delta_{1s}\bar\delta_{21}}{\delta_{11}\bar\delta_{22} - \bar\delta_{12}\bar\delta_{21}}. \tag{16}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus (15a), wenn dort die y_{1g} und y_{2g} durch y_{1s} und y_{2s} ersetzt werden. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die Vorzahlen C_{1s} und C_{2s}.

c) **Ständige Last.** Die Belastung p wird in einem Zeitpunkt $t_\lambda \neq 0$ aufgebracht. Die Überzähligen $X_{1p}^{\lambda\lambda}$ und $X_{2p}^{\lambda\lambda}$ im selben Augenblick folgen aus (13a), wenn dort die δ_{ik} durch $\bar\delta_{ik}/(1+\psi_\lambda) + \bar{\bar\delta}_{ik}$ ersetzt werden. Die durch das Kriechen entstehenden Überzähligen $Y_{1p}^{\lambda t}$ und

$Y_{2p}^{\lambda t}$ erfüllen ähnliche Differentialgleichungen wie (13). Die partikuläre Lösung lautet nun

$$y_{1p} = -X_{1p}^{\lambda\lambda} - \frac{\bar{\delta}_{1p}\bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}\bar{\delta}_{2p}}{\bar{\delta}_{11}\bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}\bar{\delta}_{21}}, \qquad y_{2p} = -X_{2p}^{\lambda\lambda} - \frac{\bar{\delta}_{11}\bar{\delta}_{2p} - \bar{\delta}_{1p}\bar{\delta}_{21}}{\bar{\delta}_{11}\bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}\bar{\delta}_{21}}, \tag{17}$$

und die allgemeine Lösung

$$Y_{1p}^{\lambda t} = y_{1p} + C_{1p}(\bar{\delta}_{22} + \hat{\lambda}_1\bar{\delta}_{22})\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda} + C_{2p}(\bar{\delta}_{22} + \hat{\lambda}_2\bar{\delta}_{22})\frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda},$$

$$Y_{2p}^{\lambda t} = y_{2p} - C_{1p}(\bar{\delta}_{21} + \hat{\lambda}_1\bar{\delta}_{21})\frac{\Phi_1^t}{\Phi_1^\lambda} - C_{2p}(\bar{\delta}_{21} + \hat{\lambda}_2\bar{\delta}_{22})\frac{\Phi_2^t}{\Phi_2^\lambda}.$$

Die Konstanten C_{1p} und C_{2p} erfüllen die Gleichungen (15b), wobei y_{1g}, y_{2g} durch y_{1p} und y_{2p} ersetzt werden.

4. Aufstellung der Grundgleichungen bei Benützung eines statisch unbestimmten Grundsystems. Wenn das Grundsystem statisch bestimmt ist, geht das Kriechen unbehindert vor sich. Im Falle eines statisch unbestimmten Grundsystems liegt ein behindertes Kriechen vor und muß anstatt Gleichung (3) die Gleichung (12) benützt werden. Das Verfahren soll an einem zweifach statisch unbestimmten System gezeigt werden.

Wir bezeichnen mit S_2 das zweifach statisch unbestimmte System und mit S_0 das statisch bestimmte Grundsystem, während mit S_1 das einfach statisch unbestimmte Grundsystem bezeichnet sei, welches durch Fortlassen der Überzähligen X_2 entsteht.

Die Elastizitätsgleichung für die Bestimmung der Überzähligen X_2 infolge einer Belastung p lautet nun

$$X_{2p}^{00}\delta_{22}' + \delta_{2p}' = 0, \tag{18a}$$

wobei der Strich bedeutet, daß die entsprechende Größe auf das einfach statisch unbestimmte Grundsystem S_1 bezogen ist. Es gilt allgemein

$$\delta_{2p}' = \delta_{2p} + \delta_{21}X_{1p}',$$

wobei X_{1p}' aus der Elastizitätsgleichung

$$X_{1p}'\delta_{11} + \delta_{1p}' = 0 \tag{18b}$$

zu bestimmen ist. Damit folgt

$$\delta_{2p}' = \delta_{2p} - \delta_{21}\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}.$$

Ähnlich bekommt man

$$\delta_{22}' = \delta_{22} - \delta_{21}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}.$$

Diese Werte eingesetzt in Gleichung (18a) geben das bekannte Ergebnis:

$$X_{2p}^{00} = -\frac{\delta_{11}\delta_{2g} - \delta_{1g}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}.$$

Die Formänderungsgrößen δ_{22}' und δ_{2p}' des Systems S_1 ändern sich zeitlich gemäß der Gleichung (12), welche in diesem Fall lautet

$$\delta_{2k}^{\lambda t} = \delta_{2k}^{\lambda\lambda} + \left(\frac{\Phi^t}{\Phi^\lambda} - 1\right)\frac{C_k}{\hat{\lambda}}D_r(\hat{\lambda}) + (q_t - q_\lambda)\frac{1}{D}(\bar{\delta}_{2k}D - \bar{\delta}_{21}D_{1k}), \tag{18c}$$

wobei k die Belastung und Φ die der Gleichung (18b) zugeordnete Kriechfunktion ist. Wenn die Belastung k im Zeitpunkt t_λ auferlegt wird, bekommt man aus (18b) die Überzählige $X_{1k}'^{\lambda\lambda}$ und eine zusätzliche $Y_{1k}'^{\lambda t}$, welche folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\left(\frac{\bar{\delta}_{11}}{1+\varphi} + \bar{\delta}_{11}\right)\frac{dY_{1k}'}{dq} + \bar{\delta}_{11}Y_{1k}' + X_{1k}'^{\lambda\lambda}\bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{1k} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$D(\hat{\lambda}) = \bar{\delta}_{11} + \hat{\lambda}\bar{\delta}_{11} \qquad \text{und} \qquad \hat{\lambda} = -\frac{\bar{\delta}_{11}}{\bar{\delta}_{11}},$$

und die allgemeine Lösung wird

$$Y'_{1k} = \left(X'^{\varkappa\varkappa}_{1k} + \frac{\bar\delta_{1k}}{\bar\delta_{11}}\right)\left(1 - \frac{\Phi^t}{\Phi^\varkappa}\right). \tag{18d}$$

Damit müssen in (18c) die Werte

$$C_k = -\left(X'^{\varkappa\varkappa}_{1k} + \frac{\bar\delta_{1k}}{\bar\delta_{11}}\right), \qquad \hat\lambda = -\frac{\bar\delta_{11}}{\bar\delta_{11}}, \qquad D_v(\hat\lambda) = \bar\delta_{21} + \hat\lambda\,\bar\delta_{21} = -\frac{1}{\bar\delta_{11}}(\bar\delta_{11}\bar\delta_{21} - \bar\delta_{11}\bar\delta_{21}),$$

$$D = \bar\delta_{11}, \qquad D_{1k} = \bar\delta_{1k}$$

eingesetzt werden. Es folgt

$$\delta^{\varkappa t}_{2k} = \delta^{\varkappa\varkappa}_{2k} + \left(X'^{\varkappa\varkappa}_{1k} + \frac{\bar\delta_{1k}}{\bar\delta_{11}}\right)\frac{\bar\delta_{11}\bar\delta_{21} - \bar\delta_{11}\bar\delta_{21}}{\bar\delta_{11}}\left(\frac{\Phi^t}{\Phi^\varkappa} - 1\right) + (q_t - q_\varkappa)\left(\bar\delta_{2k} - \bar\delta_{21}\frac{\bar\delta_{1k}}{\bar\delta_{11}}\right).$$

Diese Gleichung nimmt die Stelle der Grundgleichung (3) bei der Untersuchung des Kriechens des Systems S_2 unter Benützung des einfach statisch unbestimmten Grundsystems S_1 ein.

Die Aufstellung der Differentialgleichung für Y_2 erfolgt durch Addition und Nullsetzung der Formänderungen δ'_2 folgender Belastungen:

a) Äußere Belastung p wirkend von Zeitpunkt 0: Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{\varkappa\varkappa}_{2k} = \delta^{00}_{2p} = \delta_{2p} - \delta_{21}\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}, \qquad X'^{\varkappa\varkappa}_{1k} = X'^{00}_{1p} = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}, \\ &\delta^{0t}_{2p} = \delta_{2p} - \delta_{21}\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} + \left(-\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} + \frac{\bar\delta_{1p}}{\bar\delta_{11}}\right)\frac{\bar\delta_{11}\bar\delta_{21} - \bar\delta_{11}\bar\delta_{21}}{\bar\delta_{11}}(\Phi^t - 1) + q_t\left(\bar\delta_{2p} - \bar\delta_{21}\frac{\bar\delta_{1p}}{\bar\delta_{11}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

b) Überzählige X^{00}_{2p} wirkend von Zeitpunkt 0: Es gilt für diese Belastung

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{\varkappa\varkappa}_{2k} = \delta^{00}_{22} = \left(\delta_{22} - \delta_{21}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\right)X^{00}_{2p}, \qquad X'^{\varkappa\varkappa}_{1k} = X'^{00}_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}X^{00}_{2p}, \\ &\delta^{0t}_{2X} = X^{00}_{2p}\left[\delta_{22} - \delta_{21}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} + \left(-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} + \frac{\bar\delta_{12}}{\bar\delta_{11}}\right)\frac{\bar\delta_{11}\bar\delta_{21} - \bar\delta_{11}\bar\delta_{21}}{\bar\delta_{11}}(\Phi^t - 1) + q_t\left(\bar\delta_{22} - \bar\delta_{21}\frac{\bar\delta_{12}}{\bar\delta_{11}}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

c) Belastung aus der Überzähligen Y_{2p}: Der zeitliche Zuwachs dieser Überzähligen ist $(dY_2/d\tau)\,d\tau$ und wirkt vom Zeitpunkt τ an.

Hiermit wird

$$\delta^{\tau t}_{2Y} = \left[\left(\frac{\bar\delta_{22}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{22}\right) - \left(\frac{\bar\delta_{21}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{21}\right)\frac{\dfrac{\bar\delta_{12}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{12}}{\dfrac{\bar\delta_{11}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{11}}\right]\frac{dY_2}{d\tau}\,d\tau \quad \text{und} \quad X'^{\tau t}_{1Y} = -\frac{\dfrac{\bar\delta_{12}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{12}}{\dfrac{\bar\delta_{11}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{11}}\frac{dY_2}{d\tau}\,d\tau,$$

$$\delta^{0t}_{2Y} = \int_{\tau=0}^{\tau=t}\frac{dY_2}{d\tau}\left[\left(\frac{\bar\delta_{22}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{22}\right) - \left(\frac{\bar\delta_{21}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{21}\right)\frac{\dfrac{\bar\delta_{12}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{12}}{\dfrac{\bar\delta_{11}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{11}}\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\dfrac{\bar\delta_{12}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{12}}{\dfrac{\bar\delta_{11}}{1+\psi_\tau} + \bar\delta_{11}} + \frac{\bar\delta_{12}}{\bar\delta_{11}}\right)\frac{\bar\delta_{11}\bar\delta_{21} - \bar\delta_{11}\bar\delta_{21}}{\bar\delta_{11}}\left(\frac{\Phi^t}{\Phi^\tau} - 1\right) + (q_t - q_\tau)\left(\bar\delta_{22} - \bar\delta_{21}\frac{\bar\delta_{12}}{\bar\delta_{11}}\right)\right]d\tau. \tag{19c}$$

Die Gesamtformänderung δ_2 im Zeitpunkt t ist gleich der Summe der drei Teilformänderungen δ^{0t}_{2p}, δ^{0t}_{2X}, δ^{0t}_{2Y} und muß gleich Null sein. Damit lautet die Integralgleichung für die Kriechüberzählige Y_2

$$\delta^{0t}_{2Y} + \delta^{0t}_{2X} + \delta^{0t}_{2p} = 0,$$

wobei die δ_2 aus (19a, b, c) zu entnehmen sind.

Diese Gleichung zweimal differentiiert nach t unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der oberen Integrationsgrenze, gibt zwei Integralgleichungen mit einem gemeinsamen Integral. Durch Eliminierung dieses Integrals und mit Hilfe der Beziehungen

$$\frac{d\Phi}{dq} = \hat\lambda\,\frac{1+\psi}{1+\psi-\hat\lambda}\,\Phi, \tag{20a}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \lambda \frac{1 - \dfrac{\delta}{(1+\varphi)^2}}{1 - \dfrac{\lambda}{1+\varphi}} \frac{d\Phi}{d\varphi} \qquad \left(\lambda = -\frac{\bar{\delta}_{11}}{\bar{\bar{\delta}}_{11}}\right) \tag{20b}$$

bekommt man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{(1+\varphi)^2} D(1+\varphi) \frac{d^2 Y_2}{d\varphi^2} + \left[1 - \frac{\delta}{(1+\varphi)^2}\right]\left[\frac{2}{1+\varphi}(\bar{\delta}_{11}\bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}\bar{\delta}_{21}) + (\bar{\delta}_{11}\bar{\bar{\delta}}_{22} - \bar{\delta}_{12}\bar{\bar{\delta}}_{21}) + (\bar{\bar{\delta}}_{11}\bar{\delta}_{22} - \bar{\bar{\delta}}_{12}\bar{\delta}_{21})\right]\frac{dY_2}{d\varphi} + \left[1 - \frac{\delta}{(1+\varphi)^2}\right](\bar{\delta}_{11}\bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}\bar{\delta}_{21})(Y_2 + X^{00}_{2p}) + \left[1 - \frac{\delta}{(1+\varphi)^2}\right](\bar{\delta}_{11}\bar{\delta}_{2g} - \bar{\delta}_{1g}\bar{\delta}_{21}) = 0,$$

wobei $D(1+\varphi)$ die Determinante von (14) für $\lambda = 1 + \varphi$ ist.

Diese Gleichung ist identisch dem Gleichungssystem (13), da sie durch Eliminierung von Y_1 zwischen den zwei Differentialgleichungen erzeugt werden kann. Ihre allgemeine Lösung ist daher durch die zweite der Gleichung (15a) gegeben.

Nun können wir Y_1 ohne Auflösung der Differentialgleichung direkt aus dem Grundsystem S_1 bestimmen, indem wir (18d) auf jede der drei folgenden Belastungen anwenden.

a) Äußere Last g wirkend vom Zeitpunkt 0 an gibt für Y_1 folgenden Anteil:

$$\left(X'^{00}_{1g} + \frac{\bar{\delta}_{1g}}{\bar{\bar{\delta}}_{11}}\right)(1 - \Phi^t) = \left(-\frac{\delta_{1g}}{\delta_{11}} + \frac{\bar{\delta}_{1g}}{\bar{\bar{\delta}}_{11}}\right)(1 - \Phi^t). \tag{21a}$$

b) Überzählige X^{00}_{2g} wirkend vom Zeitpunkt 0 an:

$$X^{00}_{2g}\left(X'^{00}_{12} + \frac{\bar{\delta}_{12}}{\bar{\bar{\delta}}_{11}}\right)(1 - \Phi^t) = X^{00}_{2g}\left(-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} + \frac{\bar{\delta}_{12}}{\bar{\bar{\delta}}_{11}}\right)(1 - \Phi^t). \tag{21b}$$

c) Überzählige Y_{2g}, deren Zuwachs $(dY_2/d\tau)\,d\tau$ im Zeitpunkt τ zu wirken beginnt:

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{dY_2}{d\tau}\left(-\frac{\dfrac{\bar{\delta}_{12}}{1+\varphi_\tau} + \bar{\bar{\delta}}_{12}}{\dfrac{\bar{\delta}_{11}}{1+\varphi_\tau} + \bar{\bar{\delta}}_{11}} + \frac{\bar{\delta}_{12}}{\bar{\bar{\delta}}_{11}}\right)\left(1 - \frac{\Phi^t}{\Phi_\tau}\right) d\tau.$$

Nach Einsetzen von Y_2 aus (15a) und Durchführung der Integration folgt ein Ausdruck, welcher addiert zu den (21a) und (21b) die erste der Gleichungen (15a) als Lösung für Y_1 liefert.

5. Schlußbemerkung und Zusammenfassung. Die Berechnung der Kriech- und Schwindeinflüsse statisch unbestimmter Systeme, zusammengesetzt aus Beton- und Stahltragteilen, führt ganz unabhängig von der Verbindungsart des Betons mit dem Stahl auf Differentialsysteme erster Ordnung, welche mit Hilfe des Kriechintegrals gelöst werden können.

Wenn zur Aufstellung der Differentialgleichungen ein statisch bestimmtes Grundsystem benützt wird, müssen die Formänderungen der Elastizitätsbedingung aus der *Dischinger*schen Gleichung für freie Verformungen ermittelt werden. Sollte ein statisch unbestimmtes Grundsystem gewählt werden, so tritt an Stelle der Gleichung (3) die allgemeine Gleichung (12), welche von der Form des Grundsystems abhängig ist.

Wendet man die Ergebnisse von Ziff **3** auf den Verbundquerschnitt an, so erhält man die Schnittkräfteverteilung für die Momenten- bzw. Normalkraftbelastung sowie für das Schwinden mit Kriechen. Die sich daraus ergebenden Formeln stimmen mit jenen von *Fröhlich* bis auf den funktionellen Teil überein. *Fröhlich* rechnet mit konstantem Elastizitätsmodul des Betons, daher erscheinen in seinen Formeln an Stelle des allgemeinen Kriechintegrals Φ_λ seine speziellen Funktionen für $\delta = 0$, da gemäß (106)

$$\Phi_{\lambda,\,\delta=0} = e^{\varphi \frac{\lambda}{1-\lambda}} = e^{\varphi \lambda^F}$$

ist.

Die Größe λ^F stimmt mit der Wurzel der charakteristischen Gleichung von *Fröhlich* überein, da diese aus (14) (angewendet auf dem Verbundquerschnitt) folgt, wenn dort $\lambda/1 - \lambda = \lambda^F$ eingesetzt wird.

Weiter werden die Gleichung (12) für die verschiedenen Belastungen des Verbundquerschnittes und unter Anwendung der in Ziff.4 beschriebenen Methode die strengen Differentialgleichungen eines beliebigen statisch unbestimmten Verbundträgers mit konstanten Steifigkeiten abgeleitet, welche, mit Hilfe des Kriechintegrals streng gelöst, die Überzähligen in einem beliebigen Zeitpunkt liefern. Diese Gleichungen, angewendet auf die Durchlauf-Verbundträger, erhalten eine besonders einfache Form; z. B. bleibt das Stahlmoment infolge Widerlagerverschiebung zeitlich betrachtet konstant, während sich das Betonmoment genau wie jenes der reinen Betonkonstruktionen ändert. Es gilt nämlich die Gleichung

$$\overline{M}^{0t} = M^{00}\, e^{-\varphi\,(1+\delta\varphi/2)}\,.$$

Aus den Formeln der Verbundkonstruktionen können jene der symmetrisch bewehrten Betonkonstruktion abgeleitet werden, wenn in den ersten der Schwerpunktabstand des Beton- und Stahlquerschnittes gleich Null gesetzt wird. Im Sonderfall des bewehrten Stützlinienbogen stimmen die Gleichungen der strengen Lösung nicht mit jenen von *Dischinger* überein, da diese mit Hilfe des Begriffes des behinderten Kriechmaßes abgeleitet werden.

Es wird hier darauf hingewiesen, daß das behinderte Kriechmaß nicht als Ersatz des gewöhnlichen Kriechmaßes φ zur strengen Lösung der Kriechprobleme bewehrter Betonkonstruktionen benützt werden darf, da es nicht dieselben Eigenschaften wie φ besitzt. Es gilt nämlich für dieses nicht mehr das *Withney*ssche Gesetz.

(Eingegangen am 4. November 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *G. Nitsiotas*, Thessaloniki (Griechenland), Grigoriu-Saliki-Str. 8.

Der Spannungs- und Verschiebungszustand drehsymmetrischer Membrane mit beliebig gekrümmter Meridiankurve.

Von D. Rüdiger.

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziel, den Spannungs- und Verschiebungszustand von drehsymmetrischen Membranen, deren Meridianschnitte durch beliebig vorgegebene differentiierbare Funktionen bestimmt sind, in allgemeiner Form zu ermitteln. Den Ausgangspunkt hierzu bilden die bekannten Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte bzw. die Beziehungen zwischen Formänderungen und Verzerrung des differentialen Schalenabschnittes. Die Einführung von Zylinderkoordinaten ist von besonderer Bedeutung für die erfolgreiche Durchführung der Rechnung. Für die Anwendung der Membrantheorie auf praktische Bauaufgaben sind Betrachtungen über die Stützenbedingungen und das Verhalten unter Randkräften von Bedeutung. Dabei werden die von *W. Flügge* [1] dargelegten Besonderheiten im Spannungszustand der negativ gekrümmten Schalen unter harmonischen Randbelastungen mit Hilfe des Verschiebungszustandes erläutert.

2. Geometrische Grundlagen. Der Meridianschnitt der Drehschale wird durch die Funktion $r = r(x)$ nach Abb. 1 beschrieben.

Zur Vereinfachung der Rechnung ist es zweckmäßig, dimensionslose Koordinaten einzuführen. Durch Division mit dem Parameter a folgt mit $\varrho = r/a$ und $\xi = x/a$ die Gleichung der Meridiankurve zu:

$$\varrho = \varrho(\xi) \,. \tag{1}$$

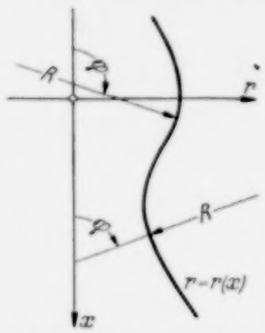


Abb. 1. Geometrie der Schalenmittelfläche und Koordinatensystem.

Für die Lösung der gestellten Aufgabe werden die folgenden Differentialbeziehungen (2) benötigt (vgl. Abb. 1):

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{dr}{ds}\,, \qquad ds = \frac{a\,d\xi}{\sin\varphi}\,, \qquad R = \frac{ds}{d\varphi} = -\frac{a}{\varrho''\sin^3\varphi}\,, \\ \sin\varphi &= (1+\varrho'^2)^{-1/2}\,, \qquad \cos\varphi = \varrho'\,(1+\varrho'^2)^{-1/2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

3. Der Spannungszustand. Die Membrantheorie der Drehschalen geht bekanntlich von den drei Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte am differentialen Schalenabschnitt aus. Sie lauten für einen positiv bzw. für einen negativ gekrümmten Schalenteil:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial\,(N_{\varphi\varphi}\,r)}{\partial s} - N_{\psi\psi}\frac{\cos\varphi}{r} + \frac{\partial N_{\varphi\psi}}{r\,\partial\psi} + p_\varphi &= 0\,, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\,(N_{\varphi\psi}\,r)}{\partial s} + N_{\psi\psi}\frac{\cos\varphi}{r} + \frac{\partial N_{\psi\psi}}{r\,\partial\psi} + p_\psi &= 0\,, \\ N_{\varphi\varphi}\frac{d\varphi}{ds} + N_{\psi\psi}\frac{\sin\varphi}{r} + p_n &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In den Gleichungen (3) sind die Schnittkräfte in Meridian- und Breitenkreisrichtung mit $N_{\varphi\varphi}$ bzw. $N_{\psi\psi}$, die Schubkräfte mit $N_{\varphi\psi}$ und $N_{\psi\varphi}$ bezeichnet. Durch p_φ, p_ψ und p_n ist die Belastung der Mantelfläche in Richtung der Meridiantangente, der Breitenkreistangente und der Schalennormalen ausgedrückt. Das wechselnde Vorzeichen der Krümmung $1/R$ der Meridiankurve wird bei positivem Bogen durch den Zuwachs $+\,d\varphi$ bzw. die Abnahme $-\,d\varphi$ des Winkels φ zwischen der negativen x-Achse und der Normalen erfüllt.

Die drei Gleichgewichtsbedingungen (3) sind zwei Differentialgleichungen und eine einfache lineare Gleichung, mit der man die Längskraft $N_{\psi\psi}$ eliminieren kann. Beachtet man, daß unter Verwendung von (2)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\,(N_{\varphi\psi}\,r^2)}{\partial s} = \frac{\partial\,(N_{\psi\psi}\,r)}{\partial s} + N_{\psi\psi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

[1] *W. Flügge*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947) S. 65.

und

$$\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\partial(N_{\varphi\varphi}\,r\sin\varphi)}{\partial s}=\frac{\partial(N_{\varphi\varphi}\,r)}{\partial s}+N_{\varphi\varphi}\,r\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds}$$

ist, dann folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial(N_{\varphi\varphi}\,r\sin\varphi)}{\partial s}+\frac{\partial N_{\varphi\psi}}{\partial\psi}\sin\varphi=-r\,(p_n\cos\varphi+p_\varphi\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial\,(N_{\varphi\psi}\,r^2)}{\partial s}-\frac{\partial\,N_{\varphi\varphi}}{\partial\psi}\,\frac{r^2}{\sin\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds}=+r^2\left(\frac{\partial p_n}{\partial\psi}\,\frac{1}{\sin\varphi}-p_\psi\right).$$

Für die Ausdrücke $N_{\varphi\varphi}\,r\sin\varphi$ und $N_{\varphi\psi}\,r^2$ führt man zweckmäßig die Abkürzungen F und Φ ein:

$$\left.\begin{aligned}+\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\,\frac{\sin\varphi}{r^2}&=-r\,(p_n\cos\varphi+p_\varphi\sin\varphi),\\ -\frac{\partial F}{\partial\psi}\,\frac{r}{\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial s}&=+r^2\left(\frac{\partial p_n}{\partial\psi}\,\frac{1}{\sin\varphi}-p_\psi\right).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Die Schnittkräfte der Schale können durch die Funktionen F und Φ und durch die Komponenten der Flächenbelastung ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned}N_{\varphi\varphi}&=+F\,\frac{1}{r\sin\varphi},&\frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial\psi}&=-\frac{\partial\Phi}{\partial s}\,\frac{\sin\varphi}{r^2}\,\frac{ds}{d\varphi}-\sin\varphi\,\frac{ds}{d\varphi}\left(\frac{\partial p_n}{\partial\psi}\,\frac{1}{\sin\varphi}-p_\psi\right),\\ N_{\psi\psi}&=-F\,\frac{1}{\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds}-p_n\,\frac{r}{\sin\varphi},&\frac{\partial N_{\psi\psi}}{\partial\psi}&=+\frac{\partial\Phi}{\partial s}\,\frac{1}{r}-r\,p_\psi,\\ \frac{\partial N_{\varphi\psi}}{\partial\psi}&=-\frac{\partial F}{\partial s}\,\frac{1}{\sin\varphi}-\frac{r}{\sin\varphi}\,(p_n\cos\varphi+p_\varphi\sin\varphi),&N_{\varphi\psi}&=\Phi\,\frac{1}{r^2}.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Geht man in den Gleichungen (4) auf Zylinderkoordinaten über, so folgt mit (2)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\,\frac{1}{a\,\varrho^2}&=-a^2\,\varrho\,(p_n\,\varrho'+p_\varrho),\\ \frac{\partial F}{\partial\psi}\,a\,\varrho\,\varrho''+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}&=+\frac{a^3\,\varrho^2}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial p_n}{\partial\psi}\,\frac{1}{\sin\varphi}-p_\psi\right).\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Die simultanen Differentialgleichungen (6) beschreiben in allgemeiner Form den Membranspannungszustand einer beliebig gekrümmten Drehschale nach (1). Sie lassen sich auch in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung umwandeln:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\,\varrho^2\right)-\frac{\partial^2F}{\partial\psi^2}\,\varrho\,\varrho''=-\frac{a^2\,\varrho^2}{\sin\varphi}\left[\frac{\partial^2p_n}{\partial\psi^2}\,\frac{1}{\sin\varphi}-\frac{\partial p_\psi}{\partial\psi}\right]-a^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varrho^3\,(p_n\,\varrho'+p_\varrho)\right].\tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\,\frac{1}{\varrho\,\varrho''}\right)-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}\,\frac{1}{\varrho^2}=+a^3\,\varrho\left[\frac{\partial p_n}{\partial\psi}\,\varrho'+\frac{\partial p_\psi}{\partial\psi}\right]+a^3\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\varrho}{\varrho''\sin\varphi}\left(\frac{\partial p_n}{\partial\psi}\,\frac{1}{\sin\varphi}-p_\psi\right)\right].\tag{8}$$

Der Charakter der Differentialgleichungen (7) und (8) für die Dehnungsspannungen wird durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung der Meridianfunktion $\varrho=\varrho(\xi)$ bestimmt; denn im Falle der positiv gekrümmten Schalen ist ϱ'' für jeden Schalenpunkt negativ, bei den Schalen mit negativem *Gauß*schen Krümmungsmaß dagegen ist ϱ'' stets positiv. Die Differentialgleichungen für die Dehnungskräfte positiv und negativ gekrümmter Schalen sind also, worauf *W. Flügge* hingewiesen hat, von elliptischem und hyperbolischem Typ.

Die partiellen Differentialgleichungen (7) und (8) werden durch folgenden Ansatz (9) befriedigt, wenn die allein von ξ abhängigen Funktionen F_n und Φ_n den Differentialgleichungen (10) und (11) genügen.

$$\left.\begin{aligned}p_n&=p_{n\,n}\cos n\,\psi,&N_{\varphi\varphi}&=N_{\varphi\varphi\,n}\cos n\,\psi,\\ p_\varphi&=p_{\varphi\,n}\cos n\,\psi,&N_{\psi\psi}&=N_{\psi\psi\,n}\cos n\,\psi,\\ p_\psi&=p_{\psi\,n}\sin n\,\psi,&N_{\varphi\psi}&=N_{\varphi\psi\,n}\sin n\,\psi,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$\varrho\,F_n''+2\,\varrho'\,F_n'+n^2\,\varrho\,F_n=P_n,\tag{10}$$

$$\varrho\,\varrho''\,\Phi_n''-(\varrho\,\varrho'')'\,\Phi_n'+n^2\,\varrho''^2\,\Phi_n=\varrho^2\,\varrho''^2\,Q_n.\tag{11}$$

In den Gleichungen (10) und (11) sind für die Störungsfunktionen die Abkürzungen:

$$P_n = + \frac{a^2 n^2 \varrho}{\sin^2 \varphi} \left(p_{nn} + \frac{1}{n} p_{\varphi n} \sin \varphi \right) - \frac{a^2}{\varrho} \left[\varrho^3 \left(p_{nn} \varrho' + p_{\varphi n} \right) \right]' ,$$

$$Q_n = - a^3 n \varrho \left(p_{nn} \varrho' + p_{\varphi n} \right) - a^3 \left[\frac{\varrho}{\varrho'' \sin \varphi} \left(\frac{n p_{nn}}{\sin \varphi} + p_{\varphi n} \right) \right]' ,$$

eingeführt worden. Die Beziehungen (5) gehen mit dem Ansatz (9) und den Gleichungen (2) über in

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi\varphi} &= + F_n \frac{1}{a \varrho \sin \varphi} \cos n \psi , \\ N_{\psi\psi} &= \left[+ F_n \frac{\varrho'' \sin \varphi}{a} - p_{nn} \frac{a \varrho}{\sin \varphi} \right] \cos n \psi , \\ N_{\varphi\psi} &= \left[- F_n' \frac{1}{a n} - \frac{a \varrho}{n} \left(p_{nn} \varrho' + p_{\varphi n} \right) \right] \sin n \psi , \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi\varphi} &= \left[\Phi_n' \frac{1}{n a^2 \varrho^2 \varrho'' \sin \varphi} + \frac{a}{n \varrho'' \sin^2 \varphi} \left(\frac{n p_{nn}}{\sin \varphi} + p_{\varphi n} \right) \right] \cos n \psi , \\ N_{\psi\psi} &= \frac{1}{n} \left[\Phi_n' \frac{\sin \varphi}{a^2 \varrho} + a \varrho p_{\psi n} \right] \cos n \psi , \\ N_{\varphi\psi} &= \Phi_n \frac{1}{a^2 \varrho^2} \sin n \psi . \end{aligned}\right\}$$

Mit den Gleichungen (12) bekommen die Abkürzungen F_n und Φ_n die Bedeutung von Spannungsfunktionen, aus denen sich die Schnittkräfte der Membran herleiten.

Die Zurückführung der Berechnung des Spannungszustandes einer Membran auf die Integration einer Differentialgleichung für eine Spannungsfunktion ist in der Literatur wiederholt behandelt worden. Der Anfang liegt bei *M. Lagally*[1]. Er verfolgt den Spannungs- und Verschiebungszustand einer beliebigen Membran infolge von Randkräften. Unter Benutzung der von *W. Blaschke*[2] dargelegten Deutung des Drehrisses als Kräfteplan eines möglichen Membranspannungszustandes führte *Lagally* die Berechnung der Spannungen und Verschiebungen auf dieselbe Differentialgleichung zurück, mit deren Lösung *J. Weingarten*[3] die unendlich kleinen Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche ableitete. Die *Weingarten*sche Differentialgleichung für eine Spannungsfunktion f läßt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen (3) und den Beziehungen (5) herleiten. Setzt man

$$F = - \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \psi \, \partial s} \left(\frac{f}{\sin \varphi} \right) \frac{ds}{d\varphi} ,$$

so ergeben sich die Gleichungen (5) für die Flächenkräfte $p_n = p_\varphi = p_\psi = 0$:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi\varphi} &= - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \psi \, \partial s} \left(\frac{f}{\sin \varphi} \right) \frac{ds}{d\varphi} , \\ N_{\psi\psi} &= + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \, \partial s} \frac{f}{\sin \varphi} , \\ N_{\varphi\psi} &= + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{d\varphi} \right) + f \frac{d\varphi}{ds} . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Mit den Gleichungen (13) läßt sich aus der Gleichgewichtsbedingung (3b) $\frac{\partial N_{\varphi\psi}}{\partial s}$ berechnen:

$$\frac{\partial N_{\varphi\psi}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left[- \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{d\varphi} - \frac{\sin \varphi}{r} f \right]$$
$$- \frac{\cos \varphi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{d\varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{d\varphi} + f \left(\frac{\sin \varphi}{r} + \frac{d\varphi}{ds} \right) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \right] .$$

[1] *M. Lagally*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 337.

[2] *W. Blaschke*, Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut, Intern. Congr. of Mathem. Cambridge 1912.

[3] *J. Weingarten*, J. reine angew. Math. Mech. 100 (1887) S. 296.

Der erste Teil der Gleichung liefert eine zweite Beziehung zur Berechnung der Schubkraft $N_{\varphi\psi}$:

$$N_{\varphi\psi} = -\left[\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial s}\frac{ds}{d\varphi} + f\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{r}{\sin\varphi}\frac{\partial^2 f}{r^2\,\partial\psi^2}\right].$$

Der Inhalt der zweiten eckigen Klammer verschwindet identisch. Es ist die *Weingarten*sche Differentialgleichung, die *Lagally* aus der Symmetrie des Spannungstensors herleitete. Das Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Schubkraft liefert ebenfalls die *Weingarten*sche Differentialgleichung für drehsymmetrische Membrane:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{ds}{d\varphi}\,r\right) + f\left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2} = 0\,. \tag{14}$$

F. Löbell[1] hat den von *Lagally* dargelegten Lösungsweg auf Membrane erweitert, die einem gegebenen System von außen auf sie wirkender Kräfte das Gleichgewicht halten. Die Lösung führte *Löbell* auf eine Differentialgleichung zurück, die sich von der durch *Lagally* aufgestellten nur um ein Störungsglied unterscheidet. *A. Pucher*[2] stellte die Gleichgewichtsbedingungen der Dehnungskräfte positiv gekrümmter Rotationsschalen entgegen der üblichen Formulierung (3) in Richtung des Radiusvektors, der Tangente an den Breitenkreis und der x-Achse auf. Die Schnittkräfte werden von einer Spannungsfunktion abgeleitet, die einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Die Lösung versagt an Schalen mit senkrechten Tangenten, da nicht mit den tatsächlichen Schnittkräften gerechnet wird, sondern mit deren auf die Grundrißebene bezogenen Horizontalkomponenten.

4. Der Verschiebungszustand. Der Verschiebungszustand der Schale ist durch die Verschiebungen u, v und w der Punkte der Mittelfläche bestimmt. Die Verschiebungen v und u wirken positiv in Richtung der Meridiantangente mit ds bzw. in Richtung der Breitenkreistangente mit $d\psi$. Die Verschiebung w ist in Richtung der Schalennormale positiv nach innen definiert. Zwischen der Verzerrung des differentialen Schalenabschnittes und dem Verschiebungszustand gelten die bekannten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= +\frac{\partial u}{\partial s} - w\frac{d\varphi}{ds}\,,\\
\varepsilon_{\psi\psi} &= +\frac{\partial u}{r\,\partial\psi} + v\frac{\cos\varphi}{r} - w\frac{\sin\varphi}{r}\,,\\
\gamma_{\varphi\psi} &= +\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{r\,\partial\psi} - u\frac{\cos\varphi}{r}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die Verzerrung ist mit dem Spannungszustand durch das *Hooke*sche Elastizitätsgesetz verknüpft:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{Eh}\left(N_{\varphi\varphi} - \nu\,N_{\psi\psi}\right) = \frac{\overline{N}_{\varphi\varphi}}{Eh}\,,\\
\varepsilon_{\psi\psi} &= \frac{1}{Eh}\left(N_{\psi\psi} - \nu\,N_{\varphi\varphi}\right) = \frac{\overline{N}_{\psi\psi}}{Eh}\,,\\
\gamma_{\varphi\psi} &= \frac{1}{Eh}\,2\,(1+\nu)\,N_{\varphi\psi} = \frac{2\,\overline{N}_{\varphi\psi}}{Eh}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hierin ist E der Elastizitätsmodul, ν die Querzahl und h die Schalenstärke.

Aus den drei Beziehungen zwischen Verzerrung und Verschiebungszustand kann die Verschiebung w normal zur Schalenmittelfläche eliminiert werden. Beachtet man, daß unter Verwendung von (2)

$$r\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\cos\varphi}{r}\,,$$

$$\sin\varphi\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{\sin\varphi}\right) = \frac{\partial v}{\partial s} - v\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{d\varphi}{ds}$$

[1] *F. Löbell*, Z. angew. Math. Mech. 7 (1927) S. 463.
[2] *A. Pucher*, Intern. Vereinigg. f. Brückenb. u. Hochb. 5 (1938) S. 275.

ist, dann folgt aus (15) und (16)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial v}{\partial \psi}\frac{1}{r^2}&=\frac{2\,\overline{N}_{\varphi\psi}}{Ehr}\,,\\ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{\sin\varphi}\right)-\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds}&=\frac{1}{Eh\sin\varphi}\left[\overline{N}_{\varphi\varphi}-\overline{N}_{\psi\psi}\frac{r}{\sin\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Führt man in das simultane System (17) Zylinderkoordinaten ein, so ergeben sich mit (2) und den Abkürzungen

$$\hat{F}=\frac{u}{r}\,,\quad \hat{\Phi}=\frac{v}{\sin\varphi}\,,\quad \mathfrak{S}=\frac{2\,N_{\varphi\psi}}{Eh\,\varrho\sin\varphi}\,,\quad \mathfrak{N}=\frac{a}{Eh}\left[\varrho\,\varrho''\,\overline{N}_{\psi\psi}+\frac{1}{\sin^2\varphi}\,\overline{N}_{\varphi\varphi}\right]$$

die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\hat{F}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\psi}\frac{1}{a\,\varrho^2}&=\mathfrak{S}\,,\\ \frac{\partial\hat{F}}{\partial\psi}a\,\varrho\,\varrho''+\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\xi}&=\mathfrak{N}\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die simultanen Differentialgleichungen (18) beschreiben den Verschiebungszustand der Membran $\varrho=\varrho(\xi)$ für einen beliebigen Spannungszustand nach (5). Sie lassen sich auch in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung umwandeln:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\hat{F}}{\partial\xi}\,\varrho^2\right)-\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial\psi^2}\,\varrho''=-\frac{\partial\mathfrak{N}}{a\,\partial\psi}+\frac{\partial}{\partial\xi}(\varrho^2\,\mathfrak{S})\,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\xi}\frac{1}{\varrho\,\varrho''}\right)-\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\psi^2}\frac{1}{\varrho^2}=-\frac{\partial\mathfrak{S}}{a\,\partial\psi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\varrho\,\varrho''}\right). \tag{20}$$

Die Differentialgleichungen (19) und (20) für die Formänderungen der Schale sind, wie schon *M. Lagally* mit der *Weingarten*schen Differentialgleichung gezeigt hat, abgesehen von den Störungsfunktionen mit den Differentialgleichungen (7) und (8) des Spannungsproblems identisch.

Der Verschiebungszustand mit u, v und w kann analog den Beziehungen (5) durch die Funktionen $\hat{F}$ und $\hat{\Phi}$ und durch die bekannten Schnittkräfte der Membran ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} u&=\hat{F}\,a\,\varrho\,,\\ \frac{\partial v}{\partial\psi}&=-a\,\varrho^2\sin\varphi\left(\frac{\partial\hat{F}}{\partial\xi}-\mathfrak{S}\right),\\ \frac{\partial w}{\partial\psi}&=-a\,\varrho\left(\frac{\partial\hat{F}}{\partial\xi}\,\varrho\cos\varphi-\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial\psi^2}\right)-a\,\varrho\left(\frac{\partial\overline{N}_{\varphi\psi}}{\partial\psi}\,\frac{1}{Eh\sin\varphi}-\varrho\cos\varphi\,\mathfrak{S}\right),\\ &\text{bzw.}\\ \frac{\partial u}{\partial\psi}&=-\frac{1}{\varrho''}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\xi}-\mathfrak{N}\right),\\ v&=+\hat{\Phi}\sin\varphi\,,\\ w&=-\frac{1}{\varrho''\sin\varphi}\,\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\xi}+\hat{\Phi}\cos\varphi+\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\varrho''}-a\,\varrho\,\frac{\overline{N}_{\psi\psi}}{Eh}\right). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Legt man einen im Breitenkreis harmonischen Spannungszustand nach (9) zugrunde, so werden die partiellen Differentialgleichungen (19) und (20) durch die allein von ξ abhängigen Funktionen $\hat{F}_n$ und $\hat{\Phi}_n$ befriedigt, wenn diese den totalen Differentialgleichungen

$$\varrho\,\hat{F}_n''+2\,\varrho'\,\hat{F}_n'+n^2\,\varrho''\,\hat{F}_n=\hat{P}_n\,, \tag{22}$$

$$\varrho\,\varrho''\,\hat{\Phi}_n''-(\varrho\,\varrho'')'\,\hat{\Phi}_n'+n^2\,\varrho''^2\,\hat{\Phi}_n=\varrho^2\,\varrho''^2\,\hat{Q}_n \tag{23}$$

mit

$$\hat{P}_n=\frac{n\,\varrho}{a}\,\mathfrak{N}_n+\frac{1}{\varrho}\,(\varrho^2\,\mathfrak{S}_n)'\,,\quad \hat{Q}_n=\left[-a\,n\,\mathfrak{S}_n+\left(\frac{\mathfrak{N}_n}{\varrho\varrho''}\right)'\right]$$

genügen. Sind nach Integration der Differentialgleichungen (22) und (23) die für den Verschiebungszustand charakteristischen Funktionen $\hat{F}_n$ und $\hat{\Phi}_n$ bekannt, so können die Formände-

rungen aus den Gleichungen (21) abgeleitet werden:

$$\left.\begin{aligned} u &= \hat{F}_n\, a\, \varrho \sin n\,\psi\,, \\ v &= \frac{a\,\varrho^2 \sin\varphi}{n}\,(F_n' - \mathfrak{S}_n)\cos n\,\psi\,, \\ w &= \frac{a\,\varrho}{n}\left[\left(\hat{F}_n'\,\varrho\cos\varphi + \frac{n^2}{\sin\varphi}\,F_n\right) - \left(\frac{\overline{N}_{\psi\psi n}}{Eh}\,\frac{n}{\sin\varphi} + \mathfrak{S}_n\,\varrho\cos\varphi\right)\right]\cos n\,\psi\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{n\,\varrho''}\,(\Phi_n' - \mathfrak{N}_n)\sin n\,\psi\,, \\ v &= -\,\hat{\Phi}_n \sin\varphi\cos n\,\psi\,, \\ w &= \left[-\frac{1}{\varrho''\sin\varphi}\,\hat{\Phi}_n' + \hat{\Phi}_n\cos\varphi + \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\mathfrak{N}_n}{\varrho''} - a\,\varrho\,\frac{\overline{N}_{\varphi\psi n}}{Eh}\right)\right]\cos n\,\psi\,. \end{aligned}\right\}$$

Die Verschiebung w folgt auch mit (15b) aus beiden charakteristischen Funktionen ohne Differentiation zu

$$w = \left[\hat{F}_n\,\frac{n\,a\,\varrho}{\sin\varphi} + \hat{\Phi}_n\cos\varphi - \frac{a\,\varrho\,\overline{N}_{\psi\psi n}}{Eh\sin\varphi}\right]\cos n\,\psi\,.$$

Damit ist die Berechnung der Verschiebungen der Membran auf die Integration einer Differentialgleichung für eine charakteristische Funktion $\hat{F}$ bzw. $\hat{\Phi}$ zurückgeführt.

5. Lösung der Differentialgleichungen. Bei der Lösung der Differentialgleichungen für den Spannungs- und den Verschiebungszustand werden drehsymmetrische, antimetrische und die harmonische Belastung mit $n \geq 2$ unterschieden.

Für Drehsymmetrie sind die Lösungen im allgemeinen bekannt. Mit $p_\psi = 0$ verschwindet die Schubkraft $N_{\varphi\psi}$ und die Verschiebung u. Die Schnittkräfte $N_{\varphi\varphi}$, $N_{\psi\psi}$, und die Verschiebungen v, w werden aus den allgemeinen Gleichungen für $\Phi = \hat{\Phi} = n = 0$ hergeleitet. Unter Umgehung der Zwischenrechnung folgen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi\varphi_0} &= -\frac{a}{\varrho\sin\varphi}\left[\int^{\xi}(p_{n_0}\,\varrho' + p_{\varphi_0})\,\varrho\,d\xi + C\right], \\ N_{\psi\psi_0} &= -\,a\,\varrho''\sin\varphi\left[\int^{\xi}(p_{n_0}\,\varrho' + p_{\varphi_0})\,\varrho\,d\xi + C\right] - \frac{p_{n_0}\,a\,\varrho}{\sin\varphi}\,, \\ v_0 &= +\sin\varphi\left[\int^{\xi}\mathfrak{N}_0\,d\xi + \hat{C}\right], \\ w_0 &= +\cos\varphi\left[\int^{\xi}\mathfrak{N}_0\,d\xi + \hat{C}\right] - \frac{a\,\varrho\,\overline{N}_{\psi\psi_0}}{Eh\sin\varphi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Der Index 0 deutet auf die drehsymmetrische Belastung mit $n = 0$ hin. C und $\hat{C}$ kennzeichnen die Integrationskonstanten, die den Randbegingungen angepaßt werden können.

Im Falle der antimetrischen Belastung ist $n = 1$. Ersetzt man in der verkürzten Differentialgleichung (10) die Funktion F_1 durch $\chi_1(\xi)/\varrho$, so vereinfacht sich diese zu $\chi'' = 0$. Daraus folgen mit den Integrationskonstanten A und B die Lösungen

$$F_1 = \frac{1}{\varrho}\,(A\,\xi + B)\,, \quad \Phi_1 = -\,a\,A\,(\varrho - \xi\,\varrho') + a\,B\,\varrho'\,.$$

Sie gelten für eine beliebige Meridianfunktion nach (1). Die vollständigen Lösungen können durch Variation der Konstanten berechnet werden; z. B. ist

$$F_1 = \frac{1}{\varrho}\,[A\,\xi + B + A(\xi)\,\xi + B(\xi)]\,,$$

wobei die Funktionen $A(\xi)$ und $B(\xi)$ dem Gleichungssystem

$$A'\frac{\xi}{\varrho}+B'\frac{1}{\varrho}=0\,,\quad A'\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)'+B'\left(\frac{1}{\varrho}\right)'=\frac{P_1}{\varrho}$$

genügen. Definiert man die Abkürzungen

$$J_1^{(1)}=\int^{\xi}P_1(\xi)\,d\xi\,,\qquad J_1^{(2)}=\int^{\xi}P_1(\xi)\,\xi\,d\xi\,,$$

$$L_1^{(1)}=\int^{\xi}Q_1(\xi)\,\varrho'\,d\xi\,,\qquad L_1^{(2)}=\int^{\xi}Q_1(\xi)\,(\varrho-\xi\,\varrho')\,d\xi\,,$$

dann ergeben sich die Lösungen der vollständigen Differentialgleichungen (10) und (11) zu

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\frac{1}{\varrho}\,[\xi\,J_1^{(1)}-J_1^{(2)}+\xi\,A+B],\\ \Phi_1&=(\xi\,\varrho'-\varrho)\,(L_1^{(1)}+A\,a)+\varrho'\,(L_1^{(2)}+B\,a)\,,\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

woraus sich mit (12) der Spannungszustand bei antimetrischer Belastung berechnet:

$$\left.\begin{aligned}N_{\varphi\varphi}&=\frac{1}{a\,\varrho^2\sin\varphi}\,[\xi\,(J_1^{(1)}+A)-J_1^{(2)}+B]\cos\psi\,,\\ N_{\psi\psi}&=\frac{1}{a^2\,\varrho^2}\,[(\xi\,\varrho'-\varrho)\,(L_1^{(1)}+A\,a)+\varrho'\,(L_1^{(2)}+B\,a)]\cos\psi\,,\\ N_{\varphi\psi}&=\left|\frac{\varrho''\sin\varphi}{a\,\varrho}\,[\xi\,(J_1^{(1)}+A)-J_1^{(2)}+B]-\frac{a\,\varrho\,p_n}{\sin\varphi}\right|\sin\psi\,.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

In derselben Weise kann auch der Verschiebungszustand explizit geschrieben werden. Die Lösungen F_1 und Φ_1 nach (26) werden durch $\hat{F}_1$ und $\hat{\Phi}_1$ mit $\hat{J}_1^{(1)}$, $\hat{J}_1^{(2)}$ und $\hat{L}_1^{(1)}$, $\hat{L}_1^{(2)}$ ersetzt, wobei die Funktionen $\hat{P}_1$ und $\hat{Q}_1$ an die Stelle von P_1 und Q_1 treten. Aus den Gleichungen (24) ergeben sich dann die Verschiebungen für den antimetrischen Spannungszustand zu

$$\left.\begin{aligned}u&=a\,[\xi\,(\hat{J}_1^{(1)}+A)-\hat{J}_1^{(2)}+B]\sin\psi\,,\\ v&=\sin\varphi\,[(\xi\,\varrho'-\varrho)\,(\hat{L}_1^{(1)}-A\,a)+\varrho'\,(\hat{L}_1^{(2)}-B\,a)]\cos\psi\,,\\ w&=\left|\frac{a}{\sin\varphi}\,[\xi\,(\hat{J}_1^{(1)}+A)-\hat{J}_1^{(2)}+B]+\cos\varphi\,[(\xi\,\varrho'-\varrho)\,(\hat{L}_1^{(1)}-A\,a)+\varrho'\,(\hat{L}_1^{(2)}-B\,a)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\overline{N}_{\varphi\varphi_1}\,a\,\varrho}{Eh\sin\varphi}\right|\cos\psi\,.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Bei harmonischer Belastung $n>1$ läßt sich ein allgemeines Integral der Differentialgleichungen mit einer beliebigen Meridianfunktion nicht angeben. Für zwei Gruppen von Funktionen ist es jedoch möglich, die Lösungen für den Spannungs- und den Verschiebungszustand auf die Integration bekannter Differentialgleichungen der Physik (Telegraphengleichung, Potentialgleichung und Differentialgleichung der schwingenden Saite) zurückzuführen.

Die erste Gruppe von Meridianfunktionen ist durch $\varrho''=\mp\varkappa^2\,\varrho$ definiert. Ihr gehören die Funktionen $\varrho=\cos\varkappa\,\xi$, $\varrho=\sin\varkappa\,\xi$, $\varrho=\mathfrak{Cof}\,\varkappa\,\xi$, $\varrho=\mathfrak{Sin}\,\varkappa\,\xi$, $\varrho=e^{-\varkappa\,\xi}$, $\varrho=e^{+\varkappa\,\xi}$ an. Führt man $F=\chi\,\varrho^{-1}$ in die Differentialgleichung (7) ein, ergibt sich

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}-\varrho''\,\varrho^{-1}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\psi^2}+\chi\right)=-\frac{a^2\,\varrho}{\sin\varphi}\left[\frac{\partial^2 p_n}{\partial\psi^2}\,\frac{1}{\sin\varphi}-\frac{\partial p_\psi}{\partial\psi}\right]-\frac{a^2}{\varrho}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,[\varrho^3\,(p_n\,\varrho'+p_\varphi)]\,.\tag{29}$$

Bei harmonischer Belastung nach (9) folgt aus (29) die verkürzte Differentialgleichung $\chi_n''+\chi_n\,\varrho''\,\varrho^{-1}\,(n^2-1)=0$. Diese Gleichung ist für Schalen mit positiver Krümmung auch von *W. Zerna*[1] gefunden worden. Nach einer dort vermerkten Notiz haben sie *P. Nemenyi* und *C. Truesdell*[2] zuerst aufgestellt.

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung der Meridianfunktion bestimmt den Charakter der Lösung von (29); denn für die positiv gekrümmten Schalen werden die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\lambda^2\mp(n^2-1)\,\varkappa^2=0$ reell, nämlich $\lambda_{12}=\pm\varkappa\sqrt{n^2-1}$, für die negativ gekrümmten Schalen dagegen imaginär: $\lambda_{12}=\pm i\,\varkappa\sqrt{n^2-1}$. Hier erkennt man die Aus-

[1] *W. Zerna*, Ing.-Archiv 17 (1949) S. 223.

[2] *P. Nemenyi* u. *C. Truesdell*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 29 (1943) S. 159.

wirkungen des Charakters der Differentialgleichungen für die Dehnungsspannungen positiv und negativ gekrümmter Schalen. Im ersten Falle — die beschreibenden partiellen Differentialgleichungen (7) und (8) sind von elliptischem Typ — führt die Lösung auf e-Funktionen:

$$F_n = \frac{1}{\varrho}\left[A\, e^{+\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi} + B\, e^{-\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi}\right],$$

$$\Phi_n = -\frac{a}{n}\left[A\, e^{+\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi}\left(-\varrho' + \varrho\,\varkappa\sqrt{n^2-1}\right) - B\, e^{-\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi}\left(\varrho' + \varrho\,\varkappa\sqrt{n^2-1}\right)\right],$$

im zweiten Falle — die partiellen Differentialgleichungen (7) und (8) sind von hyperbolischem Typ — auf trigonometrische Funktionen:

$$F_n = \frac{1}{\varrho}\left[A\cos\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi + B\sin\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi\right],$$

$$\Phi_n = \frac{a}{n}\left\{A\left[\varrho'\cos\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi + \varkappa\sqrt{n^2-1}\,\varrho\sin\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi\right]\right.$$
$$\left. + B\left[\varrho'\sin\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi - \varkappa\sqrt{n^2-1}\,\varrho\cos\sqrt{n^2-1}\,\varkappa\,\xi\right]\right\}.$$

Die Lösungen der vollständigen Differentialgleichungen (10) und (11) werden damit, wie auch bei der antimetrischen Belastung, durch Variation der Konstanten berechnet. Für die positiv gekrümmten Schalen nach $\varrho'' = -\varkappa^2\varrho$ folgen mit den Abkürzungen

$$J_n^{(1)} = \int^{\xi} e^{-\bar{\varkappa}\xi}\, P_n\, d\xi, \qquad J_n^{(2)} = \int^{\xi} e^{+\bar{\varkappa}\xi}\, P_n\, d\xi,$$

$$L_n^{(1)} = \int^{\xi} e^{-\bar{\varkappa}\xi}\,(\varrho' + \bar{\varkappa}\,\varrho)\, Q_n\, d\xi, \qquad L_n^{(2)} = \int^{\xi} e^{+\bar{\varkappa}\xi}\,(-\varrho' + \bar{\varkappa}\,\varrho)\, Q_n\, d\xi$$

$$\bar{\varkappa} = \varkappa\sqrt{n^2-1}$$

die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\varrho}\left[+ e^{+\bar{\varkappa}\xi}\left(\frac{J_n^{(1)}}{2\bar{\varkappa}} + A\right) - e^{-\bar{\varkappa}\xi}\left(\frac{J_n^{(2)}}{2\bar{\varkappa}} - B\right)\right], \\ \Phi_n &= \left[e^{+\bar{\varkappa}\xi}\,(\varrho' - \bar{\varkappa}\,\varrho)\left(\frac{L_n^{(1)}}{2\,n^2\varkappa} + \frac{Aa}{n}\right) + e^{-\bar{\varkappa}\xi}\,(\varrho' + \bar{\varkappa}\,\varrho)\left(\frac{L_n^{(2)}}{2\,n^2\bar{\varkappa}} + \frac{Ba}{n}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Definiert man für die negativ gekrümmten Schalen $\varrho'' = +\varkappa^2\varrho$ die Abkürzungen

$$J_n^{(1)} = \int^{\xi} \sin\bar{\varkappa}\,\xi\; P_n\, d\xi, \qquad J_n^{(2)} = \int^{\xi} \cos\bar{\varkappa}\,\xi\; P_n\, d\xi,$$

$$L_n^{(1)} = \int^{\xi} (\varrho'\sin\bar{\varkappa}\,\xi - \bar{\varkappa}\,\varrho\cos\bar{\varkappa}\,\xi)\, Q_n\, d\xi, \qquad L_n^{(2)} = \int^{\xi} (\varrho'\cos\bar{\varkappa}\,\xi + \bar{\varkappa}\,\varrho\sin\bar{\varkappa}\,\xi\, Q_n\, d\xi,$$

dann berechnen sich die vollständigen Lösungen zu

$$\left.\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\varrho}\left[\cos\bar{\varkappa}\,\xi\left(-\frac{J_n^{(1)}}{\bar{\varkappa}} + A\right) + \sin\bar{\varkappa}\,\xi\left(+\frac{J_n^{(2)}}{\bar{\varkappa}} + B\right)\right], \\ \Phi_n &= \left[(\varrho'\cos\bar{\varkappa}\,\xi + \bar{\varkappa}\,\varrho\sin\bar{\varkappa}\,\xi)\left(-\frac{L_n^{(1)}}{n^2\bar{\varkappa}} + \frac{Aa}{n}\right) + \right. \\ &\quad \left. + (\varrho'\sin\bar{\varkappa}\,\xi - \bar{\varkappa}\,\varrho\cos\bar{\varkappa}\,\xi)\left(+\frac{L_n^{(2)}}{n^2\bar{\varkappa}} + \frac{Ba}{n}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Mit den Funktionen F_n und Φ_n nach (30) und (31) können unter Zuhilfenahme von (12) und (24) die Schnittkräfte und Verschiebungen abgeleitet werden. In den Verschiebungsgleichungen ist wiederum $J_n^{(1)}, J_n^{(2)}$ und $L_n^{(1)}, L_n^{(2)}$ durch $\hat{J}_n^{(1)}, \hat{J}_n^{(2)}$ und $\hat{L}_n^{(1)}, \hat{L}_n^{(2)}$ mit $\hat{P}_n(\xi)$ und $\hat{Q}_n(\xi)$ zu ersetzen. Auf eine Wiedergabe der Endgleichungen wird verzichtet.

Die zweite Gruppe von Meridianfunktionen, die auf geschlossene Lösungen der Differentialgleichungen führt, ist durch $\varrho'' = \mp\,\varkappa\,\varrho^{-3}$ festgelegt. Die Bedingung enthält die folgenden Schalen:

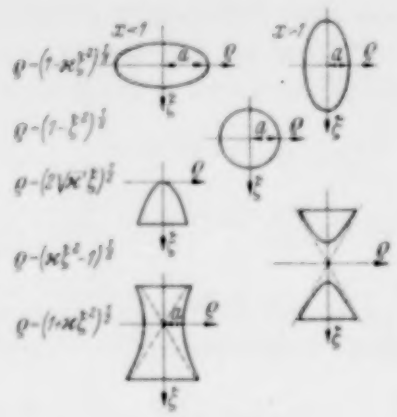
Die elliptische Drehschale:

Die Kugelschale mit $\varkappa = 1$:

Die Parabelschale:

Das zweischalige Rotationshyperboloid:

Das einschalige Rotationshyperboloid:



Führen wir in die Differentialgleichung (7) eine neue Variable $\varepsilon = \int^{\xi} \sqrt{\varkappa}\, \varrho^{-2}\, d\xi$ ein, dann ergibt sich mit

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \sqrt{\varkappa}\, \varrho^{-2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\, \varrho^2\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}\, \varkappa\, \varrho^{-2}$$

die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\varrho''\, \varrho^3}{\varkappa} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -\frac{a^2\, \varrho^4}{\varkappa \sin \varphi}\left[\frac{\partial^2 p_n}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi}\right] - \frac{a^2\, \varrho^2}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varrho^3 \left(p_n\, \varrho' + p_\varphi\right)\right]. \tag{32}$$

Die Differentialgleichung (32) führt bei harmonischer Belastung mit $\varrho'' = \mp \varkappa\, \varrho^{-3}$ auf die charakteristische Gleichung $\lambda^2 \mp n^2 = 0$. Für die positiv gekrümmten Schalen ergeben sich damit die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} F_n &= + A\, e^{+n\varepsilon} + B\, e^{-n\varepsilon}, \\ \Phi_n &= - A\, a \sqrt{\varkappa}\, e^{+n\varepsilon} + B\, a \sqrt{\varkappa}\, e^{-n\varepsilon}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

während für das einschalige Rotationshyperboloid die trigonometrischen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} F_n &= A \cos n\varepsilon + B \sin n\varepsilon, \\ \Phi_n &= - A\, a \sqrt{\varkappa} \sin n\varepsilon - B\, a \sqrt{\varkappa} \cos n\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

als Lösungen folgen. Auch hier werden die vollständigen Integrale von (10), (11) und (22), (23) durch Variation der Konstanten berechnet. Mit

$$J_n^{(1)} = \int^{\xi} e^{-n\varepsilon}\, \varrho\, P_n\, d\xi, \qquad J_n^{(2)} = \int^{\xi} e^{+n\varepsilon}\, \varrho\, P_n\, d\xi,$$

$$L_n^{(1)} = \int^{\xi} e^{-n\varepsilon}\, Q_n\, d\xi, \qquad L_n^{(2)} = \int^{\xi} e^{+n\varepsilon}\, Q_n\, d\xi$$

folgen für die positiv gekrümmten Schalen $\varrho'' = -\varkappa\, \varrho^{-3}$ die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} F_n &= e^{+n\varepsilon}\left(A + \frac{J_n^{(1)}}{2\sqrt{\varkappa}\, n}\right) + e^{-n\varepsilon}\left(B - \frac{J_n^{(2)}}{2\sqrt{\varkappa}\, n}\right), \\ \Phi_n &= \sqrt{\varkappa}\left[-e^{+n\varepsilon}\left(A\, a + \frac{L_n^{(1)}}{2\, n}\right) + e^{-n\varepsilon}\left(B\, a + \frac{L_n^{(2)}}{2\, n}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Für das einschalige Rotationshyperboloid ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} F_n &= \left(A - \frac{J_n^{(1)}}{\sqrt{\varkappa}\, n}\right) \cos n\varepsilon + \left(B + \frac{J_n^{(2)}}{\sqrt{\varkappa}\, n}\right) \sin n\varepsilon, \\ \Phi_n &= \sqrt{\varkappa}\left[\left(A\, a + \frac{L_n^{(1)}}{n}\right) \sin n\varepsilon - \left(B + \frac{L_n^{(2)}}{\sqrt{\varkappa}\, n}\right) \cos n\varepsilon\right], \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wobei die Abkürzungen

$$J_n^{(1)} = \int^{\xi} \sin n\varepsilon\, \varrho\, P_n\, d\xi, \qquad J_n^{(2)} = \int^{\xi} \cos n\varepsilon\, \varrho\, P_n\, d\xi,$$

$$L_n^{(1)} = \int^{\xi} \cos n\varepsilon\, Q_n\, d\xi, \qquad L_n^{(2)} = \int^{\xi} \sin n\varepsilon\, Q_n\, d\xi$$

eingeführt wurden.

Die Lösungen (35) und (36) beschreiben mit den Gleichungen (12) und (24) den harmonischen Spannungs- und Verschiebungszustand für die Drehschalen $\varrho'' = \mp \varkappa \varrho^{-3}$. Zur Berechnung der Formänderungen ist zu bemerken, daß an die Stelle der Funktionen F_n und Φ_n die $\hat{F}_n$ und $\hat{\Phi}_n$ mit $\hat{P}_n$ und $\hat{Q}_n$ treten.

Um an die bereits bekannten Lösungen der Kugelschale und des einschaligen Rotationshyperboloides Anschluß zu finden, betrachten wir den Zusammenhang der Funktion ε mit der Veränderlichen ξ.

Für die Ellipse mit $\varrho = (1 - \varkappa \xi^2)^{1/2}$ folgt

$$\varepsilon = \int \frac{\sqrt{\varkappa}\, d\xi}{1 - \varkappa \xi^2} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\varkappa}\,\xi = \ln \frac{1 + \sqrt{\varkappa}\,\xi}{\varrho}$$

und somit

$$e^{+n\varepsilon} = \frac{1}{\varrho^n}\left(1 + \sqrt{\varkappa}\,\xi\right)^n, \qquad e^{-n\varepsilon} = \frac{1}{\varrho^n}\left(1 - \sqrt{\varkappa}\,\xi^n\right).$$

Der Sonderfall der Kugelschale liefert nun aus (35), da

$$\varkappa = 1, \qquad \xi = \frac{x}{a} = \cos\varphi, \qquad \varrho = \frac{r}{a} = \sin\varphi$$

ist, unter Verwendung von (12) die Gleichungen für die Schnittkräfte, die *H. Reißner* [1] angegeben hat.

Das einschalige Rotationshyperboloid liefert mit $\varrho = (1 + \varkappa \xi^2)^{1/2}$

$$\varepsilon = \int \frac{\sqrt{\varkappa}\, d\xi}{1 + \varkappa \xi^2} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\varkappa}\,\xi$$

und damit

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{\varrho} = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{\sqrt{\varkappa}\,x}{r}. \tag{37}$$

Die Funktion ε bekommt eine geometrische Bedeutung. Sie ergibt sich hier als der von *W. Flügge* definierte Winkel zwischen den beiden Meridianebenen, die eine Erzeugende im Kehlkreis $x = 0$ und in einem beliebigen Punkt der Schale schneiden. Bekanntlich berechnet *W. Flügge* die Schnittkraftgleichungen der einschalig hyperbolischen Drehschale nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte am differentialen Schalenabschnitt, sondern durch Zerlegen einer harmonischen Randbelastung in die Richtung der Erzeugenden; denn für die negativ gekrümmten Membrane besitzt ja die den Spannungszustand beschreibende partielle Differentialgleichung reelle Charakteristiken, längs derer sich Unstetigkeiten der Randwerte über die ganze Schale fortpflanzen. Auf Grund dieser Tatsache hat *R. Sauer* [2] die Membrantheorie für beliebig geformte negativ gekrümmte Schalen mit Hilfe des *Blaschke*schen Kraftrisses geometrisch ausschaulich dargestellt. Die Spannungen dieser Schalen gehorchen im Netz der Asymptotenlinien einfachen geometrischen Beziehungen und können als Grenzfall der Spannungszustände in zwei Scharen gegenseitig verknoteter gespannter Fäden, die ein Viereckknetz mit nicht ebenen Vierecken aber ebenen Vierkreuzen erzeugen, dargestellt werden.

Entwickelt man in den *Flügge*schen Schnittkraftgleichungen:

$$\cos n\varepsilon = \cos^n \varepsilon - \binom{n}{2} \cos^{n-2}\varepsilon \sin^2\varepsilon + \binom{n}{4} \cos^{n-4}\varepsilon \sin^4\varepsilon \mp \ldots,$$

$$\sin n\varepsilon = \binom{n}{1} \cos^{n-1}\varepsilon \sin\varepsilon - \binom{n}{3} \cos^{n-3}\sin^3\varepsilon + \binom{n}{5} \cos^{n-5}\varepsilon \sin^5\varepsilon \mp \ldots,$$

und beachtet man (37), dann stellen sich die Schnittkräfte als Polynome von x und r dar, die *R. Rabich* [3] verwendet hat.

6. Die Randbedingungen des Spannungs- und Verschiebungszustandes. Sind an den Schalenrändern Randbedingungen vorgeschrieben, so können diese durch die Lösungen der verkürzten Differentialgleichungen befriedigt werden. Zur Verfügung stehen bei drehsym-

[1] *H. Reißner*, Spannungen in Kugelschalen, Müller-Breslau. Festschrift Leipzig 1912.
[2] *R. Sauer*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948) S. 198.
[3] *R. Rabich*, Bauplan. u. Bautechn. 7 (1953))S. 310.

metrischer Belastung je eine, bei harmonischer Belastung je zwei Integrationskonstanten für vorgeschriebene Schnittkräfte und Verschiebungen.

Es bestehen vier mögliche Stützungsarten an den Rändern I und II, welche nicht im Widerspruch zur Membrantheorie stehen.

	①	②	③	④
Rand I:	$N_{\varphi\varphi} = N_{\varphi\varphi\,\mathrm{I}}$ $N_{\varphi\psi} = N_{\varphi\psi\,\mathrm{I}}$	$u_{\mathrm{I}} = 0$ $N_{\varphi\varphi} = N_{\varphi\varphi\,\mathrm{I}}$	$v_{\mathrm{I}} = 0$ $N_{\varphi\psi} = N_{\varphi\psi\,\mathrm{I}}$	$v_{\mathrm{I}} = 0$ $N_{\varphi\psi} = N_{\varphi\psi\,\mathrm{I}}$
Rand II:	$u_{\mathrm{II}} = 0$ $v_{\mathrm{II}} = 0$	$u_{\mathrm{II}} = 0$ $N_{\varphi\varphi} = N_{\varphi\varphi\,\mathrm{II}}$	$v_{\mathrm{II}} = 0$ $N_{\varphi\psi} = N_{\varphi\psi\,\mathrm{II}}$	$u_{\mathrm{II}} = 0$ $N_{\varphi\varphi} = N_{\varphi\varphi\,\mathrm{II}}$

Betrachten wir z. B. einmal für eine Schale mit $\varrho'' = -\varkappa\,\varrho^{-3}$ den Spannungszustand, wenn nach ② an beiden Rändern die Meridiankräfte vorgeschrieben sind. Aus (12) ergeben sich mit (35) für $p_\varphi = p_\psi = p_n = 0$ die beiden Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Integrationskonstanten zu

$$A\,e^{+n\varepsilon_{\mathrm{I}}} + B\,e^{-n\varepsilon_{\mathrm{I}}} = N_{\varphi\varphi_n\,\mathrm{I}}\,a\,\varrho_I \sin\varphi_I\,,$$

$$A\,e^{+n\varepsilon_{\mathrm{II}}} + B\,e^{-n\varepsilon_{\mathrm{II}}} = N_{\varphi\varphi_n\,\mathrm{II}}\,a\,\varrho_{II} \sin\varphi_{\mathrm{II}}\,.$$

Setzt man die aus dem Gleichungspaar berechneten Konstanten A u. B in die Schnittkraftgleichungen ein, so ist der Spannungszustand der Schale bekannt. Für die Verschiebungen gilt dabei die Bedingung, daß an beiden Schalenrändern u_{I} und u_{II} nach (24) verschwinden müssen:

$$\hat{A}\,e^{+n\varepsilon_{\mathrm{I}}} + \hat{B}\,e^{-n\varepsilon_{\mathrm{I}}} = a\,u_{n\,\mathrm{I}} = 0\,,$$

$$A\,e^{+n\varepsilon_{\mathrm{II}}} + \hat{B}\,e^{-n\varepsilon_{\mathrm{II}}} = a\,u_{n\,\mathrm{II}} = 0\,.$$

Da die Nennerdeterminante des homogenen Gleichungspaares stets einen von null verschiedenen Wert hat, so kann es nur mit $\hat{A} = \hat{B} = 0$ befriedigt werden. Das bedeutet aber, daß ein dehnungsloser Verschiebungszustand des Schalenmantels ausgeschlossen ist, was für positiv gekrümmte Membrane in jedem Falle zutrifft. (Eiflächensatz). Führt man dieselbe Betrachtung für eine negativ gekrümmte Schale, z. B. für das Katenoid, durch, dann stellen sich einige Besonderheiten heraus. Auch hier ergeben sich nach (12) zur Bestimmung der Konstanten zwei Gleichungen:

$$A\cos\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{I}} + B\sin\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{I}} = N_{\varphi\varphi_n\,\mathrm{I}}\,a\,\varrho_I \sin\varphi_{\mathrm{I}}\,,$$

$$A\cos\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{II}} + B\sin\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{II}} = N_{\varphi\varphi_n\,\mathrm{II}}\,a\,\varrho_{\mathrm{II}} \sin\varphi_{\mathrm{II}}\,.$$

Die Nennerdeterminante $D = \sin\bar{\varkappa}\,(\xi_{\mathrm{II}} - \xi_{\mathrm{I}})$ kann verschwinden, wenn

$$(\xi_{\mathrm{II}} - \xi_{\mathrm{I}})\,\varkappa = l\pi \quad (l = 1, 2, \ldots) \tag{38}$$

ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Für die Schalenhöhe $H = a\pi\,l/\varkappa\sqrt{n^2 - 1}$ können die Integrationskonstanten nicht bestimmt werden. Diese Besonderheit hat *W. Flügge* am einschaligen Rotationshyperboloid festgestellt, und er hat auf die Notwendigkeit einer näheren Untersuchung hingewiesen. Die Integration der Differentialgleichungen für den Verschiebungszustand gibt über die Bedeutung von (38) Aufschluß, denn ebenso wie für die Schalen mit positiver Krümmung gelten wegen $u_{\mathrm{I}} = u_{\mathrm{II}} = 0$ zwei Gleichungen:

$$\hat{A}\cos\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{II}} + \hat{B}\sin\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{I}} = a\,u_{\mathrm{I}} = 0,$$

$$\hat{A}\cos\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{II}} + \hat{B}\sin\bar{\varkappa}\,\xi_{\mathrm{II}} = a\,u_{\mathrm{II}} = 0,$$

die dann und nur dann eine von Null verschiedene Lösung für $\hat{A}$ und $\hat{B}$ liefern (eine Lösung also, bei der sich dehnungslose Verschiebungen des Schalenmantels einstellen können), wenn die Koeffizientendeterminante $K_D = \sin\bar{\varkappa}\,(\xi_{\mathrm{II}} - \xi_{\mathrm{I}})$ verschwindet. Diese kann aber für (38) null werden. Damit ist bewiesen, daß für Membrane mit überall negativer Krümmung unter harmonischer Belastung mit $n \geq 2$ das Verschwinden der Nennerdeterminante bei der Berechnung des Spannungszustandes unter Randlasten eine unendlich kleine Beweg-

lichkeit der Schale[1] anzeigt; denn für die Membrane mit überall positiver Krümmung ist jede der möglichen Stützungen ① — ④ starr, was auch mit Ausnahme von $H = \infty$ für den antimetrischen Belastungszustand der negativ gekrümmten Drehschalen (1) gilt.

Die nachfolgende Tabelle stellt die möglichen Fälle von unendlich kleiner Beweglichkeit für die Schalen $\varrho'' = + \varkappa^2 \varrho$ und $\varrho'' = + \varkappa \varrho^{-3}$ zusammen.

Stützung und Belastung / Schalenform	1 $N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{I}} \mid N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{I}}$; $u_{n\,\mathrm{II}} = 0 \mid v_{n\,\mathrm{II}} = 0$	2 $u_{n\,\mathrm{I}} = 0 \mid N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{I}}$; $u_{n\,\mathrm{II}} = 0 \mid N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{II}}$	3 $v_{n\,\mathrm{I}} = 0 \mid N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{I}}$; $v_{n\,\mathrm{II}} = 0 \mid N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{II}}$	4 $v_{n\,\mathrm{I}} = 0 \mid N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{I}}$; $u_{n\,\mathrm{II}} = 0 \mid N_{\varphi\varphi n\,\mathrm{II}}$
$\varrho'' = \varkappa^2 \varrho$	$D \neq 0$ $K_D \neq 0$	$D = K_D = 0$ für: $H = \dfrac{a\pi}{\varkappa\sqrt{n^2 - 1}}\, l$	1. $\varrho' \neq \pm \varkappa \varrho$ $D \neq 0;\ K_D \neq 0$ 2. $\varrho' = \pm \varkappa \varrho$ $D = K_D = 0$ für: $H = \dfrac{a\pi}{\varkappa\sqrt{n^2 - 1}}\, l$	1. $\varrho' \neq 0$ $D \neq 0;\ K_D \neq 0$ 2. $\varrho_1' = 0$ $D = K_D = 0$ für: $H = \dfrac{a\pi}{2\varkappa\sqrt{n^2 - 1}}\,(2l + 1)$
$\varrho'' = \varkappa \varrho^{-3}$	$D \neq 0$ $K_D \neq 0$	$D = K_D = 0$ für: $\varepsilon_{\mathrm{II}} - \varepsilon_{\mathrm{I}} = \dfrac{\pi}{n}\, l$	$D = K_D = 0$ für: $\varepsilon_{\mathrm{II}} - \varepsilon_{\mathrm{I}} = \dfrac{\pi}{n}\, l$	$D = K_D = 0$ für: $\varepsilon_{\mathrm{II}} - \varepsilon_{\mathrm{I}} = \dfrac{\pi}{2n}\,(2l + 1)$

7. Zusammenfassung. Die Einführung von Zylinderkoordinaten (x, r, ψ) in die Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte bzw. in die Beziehungen zwischen Verzerrung und Verschiebungen am differentialen Schalenabschnitt ermöglicht die Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes von drehsymmetrischen Membranen mit beliebig gekrümmter Meridiankurve auf die Integration einer einfachen, linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine charakteristische Funktion F bzw. Φ zurückzuführen. Eine geschlossene Lösung und damit eine Darstellung der Schnittkräfte und Verschiebungen durch explizite Formeln ist bei harmonischer Belastung $\mathfrak{p}(x, \psi) = \mathfrak{p}_n(x) \cos n\psi$ für zwei Funktionsgruppen $\varrho'' = \mp \varkappa^2 \varrho$ und $\varrho'' = \mp \varkappa \varrho^{-3}$ möglich. Im Sonderfall der drehsymmetrischen und der antimetrischen Belastung mit $n = 0$ und $n = 1$ gelten die Gleichungen der Schnitt- und Verschiebungsgrößen für eine beliebige Meridianfunktion $\varrho = \varrho(\xi)$. Die Betrachtungen der Randbedingungen offener Schalen bei harmonischer Belastung geben über die infinitesimalen Deformationen einer drehsymmetrischen Membran mit überall negativer Krümmung Aufschluß.

(Eingegangen am 11. November 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *D. Rüdiger*, Dresden N 6, Königsbrücker Str. 70.

[1] Siehe die Fußnote 3 von S. 338.
J. Jellet, Abhandlungen der Royal Irish Academy XXII. Band (1853) S. 343.

Darstellung räumlicher Kräftesysteme durch rechtwinklige Kraftkreuze.

Von E. Mewes.

1. Die verschiedenen Darstellungsarten. Untersucht wird zunächst die Aufgabe, an dem Mast eines Segelbootes die Einspannkräfte und Einspanndrehkräfte[1] zu berechnen. Dazu können außer den Gewichtskräften die Form der Segelfläche und die Verteilung der Drücke vor und hinter der Fläche herangezogen werden. Genügen würde dafür aber auch, die r e s u l t i e r e n d e n Wirkungen der Kräfte am Segel zu kennen.

Es ist bekannt, daß dreidimensional verteilte Kräfte (z. B. an einer Wasserturbinenschaufel) im allgemeinen nicht zu einer Resultierenden zusammengefaßt werden können. Sie lassen sich zu zwei Kräften (K r a f t k r e u z) oder zu einer Kraft und einer Drehkraft statisch gleichwertig zusammensetzen. Im Fachschrifttum ist gezeigt, daß solche Zusammenfassungen für die gleiche Kräftegruppe in ganz verschiedener Weise möglich sind. Spezielle Darstellungsarten sind 1. der Ersatz der räumlichen Kräftegruppe durch zwei Kräfte, von denen die eine in einer bestimmten Ebene liegen und die andere senkrecht auf dieser Ebene stehen soll — diese Darstellung wird hier r e c h t w i n k l i g e s Kraftkreuz genannt — und 2. die Zusammenfassung zu einer in der mit Z e n t r a l a c h s e bezeichneten Geraden wirkenden K r a f t s c h r a u b e, bestehend aus einer Kraft R und einer Drehkraft S (Abb. 1).

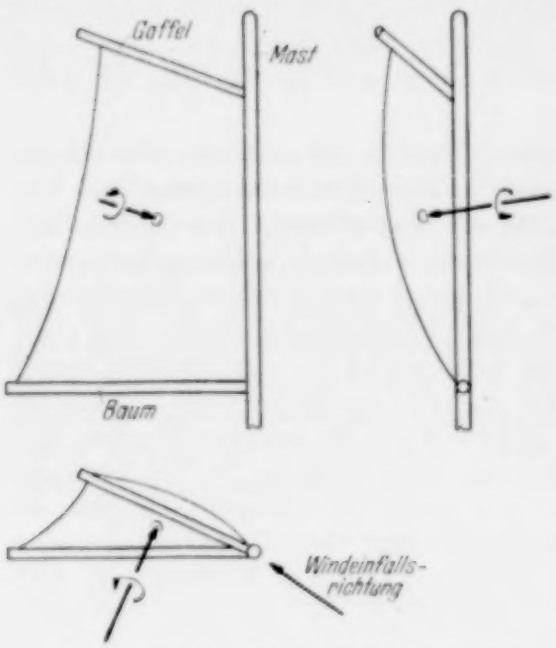


Abb. 1. Segel in 3 Projektionen mit Angabe der Kraftschraube.

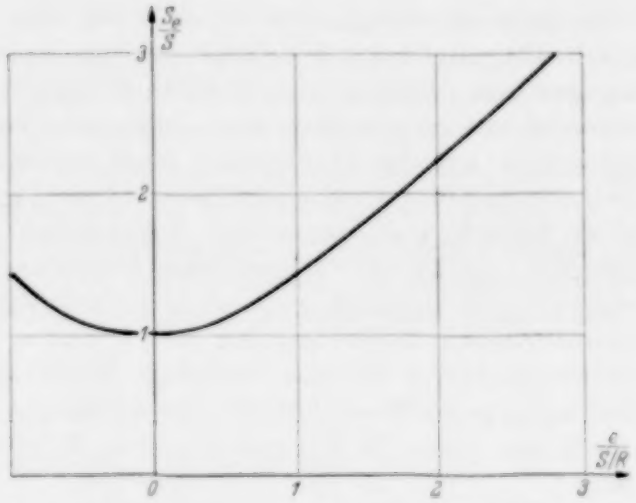


Abb. 2. Änderung der Größe der resultierenden Drehkraft mit dem Abstand des Sammelpunktes von der Zentralachse.

Die Kraftschraube ist diejenige Darstellung, die der Darstellung durch eine einzelne resultierende Kraft sozusagen am nächsten kommt. Die resultierende Drehkraft S weist unter den Darstellungen der gleichen Kräftegruppe durch Kraft und Drehkraft bei einer Sammlung auf der „Zentralachse" den Kleinstwert auf. Eine Zentralachse läßt sich nur dann nicht ermitteln, wenn die resultierende Kraft verschwindet ($R = 0$). Eine alsdann auftretende resultierende Drehkraft S wird lediglich durch Größe und Richtung gekennzeichnet; sie hat für jede parallele Achse dasselbe Drehbestreben. Die Entscheidung darüber, ob bei praktischen Untersuchungen mit einem der Sonderfälle $S = 0$ oder $R = 0$ gerechnet werden kann, ergibt sich aus einer Betrachtung von S/R. Für einen Punkt in der Entfernung e von der Zentralachse ist das resultierende Moment S_e im Verhältnis zum Moment S gleich $\sqrt{1 + \left(\frac{e}{S/R}\right)^2}$. Diese Gesetzmäßigkeit ist in Abb. 2 wiedergegeben. Sind die bei dem Problem auftretenden Längenabmessungen stets klein gegenüber S/R, dann ist das Moment überall fast gleich groß; es kann also näherungs-

[1] Nach dem Vorbild von *R. Grammel*, Der Kreisel, Berlin 1950 (2. Aufl.) wird hier die Bezeichnung D r e h k r a f t anstelle von Kräftepaar und Moment verwendet. Drehkräfte sind in den Abbildungen hier durch gebogene Pfeile dargestellt.

weise mit $R = 0$ bei $S \neq 0$ gerechnet werden. Die Zentralachse ist für diesen Fall bedeutungslos. Ist dagegen die Größe S/R sehr klein im Vergleich mit vorkommenden Einflußlängen, dann wird näherungsweise auch mit $S = 0$, $R \neq 0$ gerechnet.

Schlink und *Dietz*[1], die als Vertreter der modernen Literatur dieses Gebietes angeführt seien, erwähnen nur kurz die Kraftschraube und die Kraftkreuze. Gearbeitet wird vielmehr zumeist mit der Darstellung durch sechs Komponenten (*Plücker*sche Koordinaten), das sind drei Kraftkomponenten und drei Drehkraftkomponenten bei Bezug auf ein räumliches Achsenkreuz. In Abb. 3 sind für die Kraftwirkungen an einem Flugzeug diese sechs Komponenten, und zwar die Kraftkomponenten X, Y, Z und die Drehkraftkomponenten L, M, N für die x, y, z-Achsen im Punkte 0 angegeben.

Dem Ziel, die jeweils eleganteste Methode für die Lösung statischer Aufgaben festzustellen, wird im Schrifttum viel Raum gewidmet. Darum wird auch hier gezeigt, daß insbesondere bei Aufgaben zur Bestimmung von Lagerkräften an unter räumlichen Kräften stehenden Körpern die Benutzung rechtwinkliger Kraftkreuze für die Darstellung resultierender räumlicher Kräftewirkungen Vorteile bietet. Dafür werden im folgenden Abschnitt zwei Beispiele behandelt.

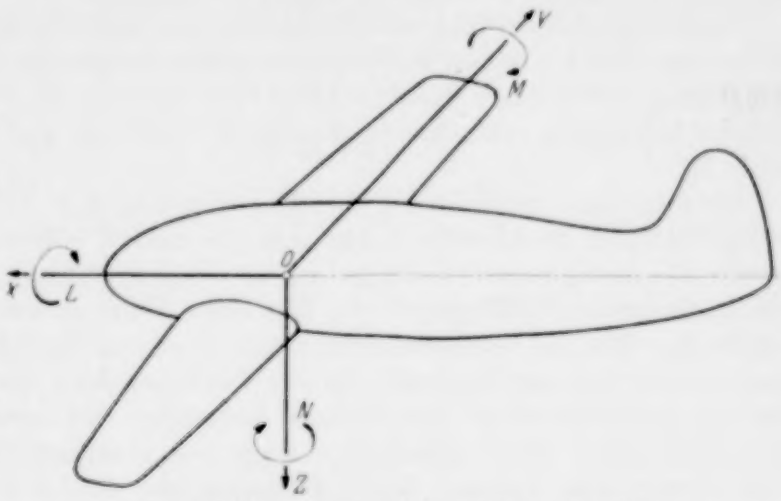


Abb. 3. Bezugsachsensystem und Komponentenbezeichnungen (nach DIN L 100).

2. Durchrechnung von Beispielen. a) Das erste Beispiel (Abb. 4) betrifft die Bestimmung der Kräfte in einem Gestell, das vollständig symmetrisch und statisch bestimmt aufgebaut ist. Die sechs Stäbe des Gestells sind durchweg Zweigelenkstäbe, in denen nur Normal-

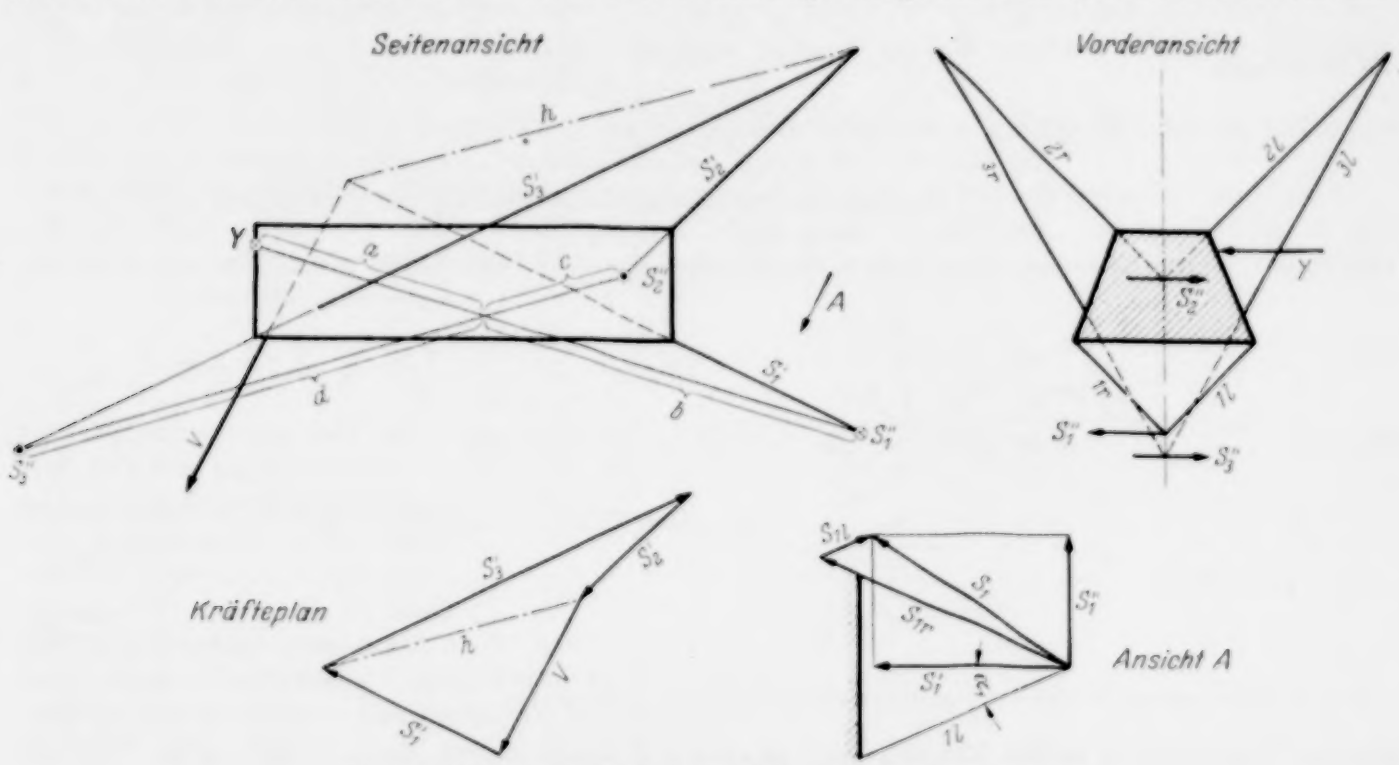


Abb. 4. Bestimmung der Kräfte in der Halterung eines Flugzeugmotors.

kräfte auftreten. Es handelt sich um die Aufhängung eines Flugzeugmotors, wofür auch bei *Schlink* und *Dietz* eine Lösung angegeben wurde. Die Stabkräfte sind S_{1l}, S_{1r}, S_{2l}, S_{2r}, S_{3l}, S_{3r}. Die Vektorsumme von S_{1l} und S_{1r} heiße S_1. Die entsprechenden Größen für die anderen Stabpaare sind S_2 und S_3. Zerlegt werden die Kräfte in Komponenten in der Symmetrieebene (S_1', S_2', S_3', in der Seitenansicht in die Projektionsrichtungen der Stäbe fallend) und senkrecht dar-

[1] *Schlink* u. *Dietz*, Technische Statik, Berlin 1948.

auf (S_1'', S_2'', S_3'', durch die Schnittpunkte der Stabrichtungen l und r jeweils in Querrichtung gehend).

Bekannt ist die Möglichkeit vereinfachter Berechnung für symmetrische Bauwerke, indem die Belastung in sogenannte symmetrische und gegensymmetrische Belastungen zerlegt wird. Bei jeder dieser Teilbelastungen sind die Kräfte in den Stäben zu beiden Seiten der Symmetrieebene gleich groß, für gegensymmetrische Belastung dabei mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Vektorsummen der Kräfte in den einzelnen Stabpaaren sind für die gegensymmetrische Belastung jeweils die Querkräfte S_1'', S_2'', S_3'', für die symmetrische Belastung S_1', S_2', S_3', d. h. die in die Symmetrieebene fallenden Komponenten.

Anders als bei *Schlink* und *Dietz* sind nun hier die symmetrische und die gegensymmetrische Belastung durch je einen Kraftvektor allein dargestellt (Abb. 4). Der die gesamte symmetrische Belastung enthaltende Kraftvektor V entspricht X, Z und M (Abb. 3), der die gegensymmetrische Belastung enthaltende Vektor Y (Abb. 4) umfaßt die Komponenten Y, L und N von Abb. 3.

Es folgt eine Schilderung der Bestimmung der S'-Werte aus V, der S''-Werte aus Y und schließlich der Stabkräfte S aus den S'- und S''-Werten. In der Seitenansicht ist V mit S_1', ferner S_2' mit S_3' zum Schnitt gebracht worden (Abb. 4). Durch die beiden Schnittpunkte geht die *Culmann*sche Hilfsgerade h. Mit ihrer Hilfe werden im Kräfteplan die Größen S_1', S_2', S_3' ermittelt. Wie die Vorderansicht zeigt, liegt der Aufhängepunkt der Stäbe 1 r und 1 l gemeinsam auf der Symmetrieebene. In der Vorderansicht werden auch die Stablinien 2 r und 2 l usw. auf der Symmetrielinie zum Schnitt gebracht und damit die Hochlagen der Komponenten S_2'' usw. bestimmt. Die vollständige Lage der Durchstoßpunkte dieser Komponenten durch die Symmetrieebene werden durch Übertragung dieser Schnittpunkte auf die Seitenansicht gewonnen. Nachdem die Lagen der Querkraftkomponenten festgestellt worden sind, vollzieht sich die Ermittlung ihrer Größen z. B. in folgender Weise. In der Seitenansicht werden je zwei der Durchstoßpunkte miteinander verbunden in der Weise, daß diese Verbindungslinien sich schneiden. In Abb. 4 ist dementsprechend Y mit S_1'' und S_2'' mit S_3'' verbunden. Unter Benutzung der auf diesen Verbindungslinien auftretenden Abschnitte a, b, c, d ist aus

$$Y\,a = S_1''\,b\,, \qquad S_2''\,c = S_3''\,d\,, \qquad Y + S_1'' = S_2'' + S_3'' \tag{1}$$

zu errechnen

$$S_1'' = Y\,\frac{a}{b}\,, \qquad S_2'' = Y\,\frac{d}{b}\,\frac{a+b}{c+d}\,, \qquad S_3'' = Y\,\frac{c}{b}\,\frac{a+b}{c+d}\,. \tag{2}$$

Aus S_1' und S_1'' usw. ist dann S_{1l} und S_{1r} bestimmbar, indem eine Zerlegung in der Stabebene, wie in Abb. 4 in der „Ansicht A" dargestellt, durchgeführt wird. Es gelten auch die Beziehungen, wenn die einzelnen α-Werte die Winkel der einzelnen Stäbe gegenüber der Symmetrieebene bedeuten:

$$S_{\substack{r\\l}} = \frac{1}{2}\left(S' \cos\alpha \pm S''\,\frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

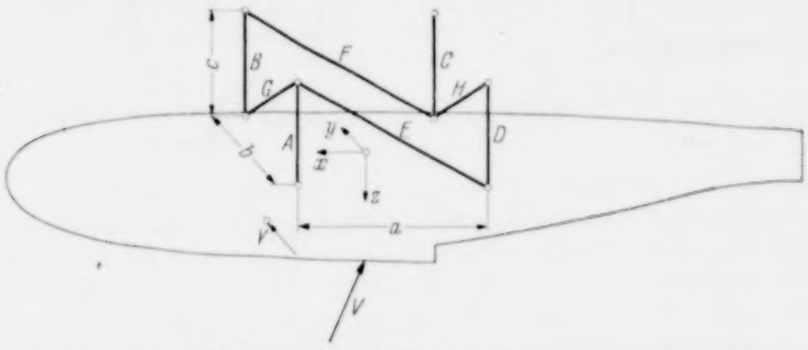


Abb. 5. Beanspruchung des Schwimmergestells eines Zentralschwimmerflugzeuges.

b) Das zweite Beispiel ist etwas schwieriger gewählt. Bei ihm liegt im Gestell nicht mehr vollständige Symmetrie vor (Abb. 5). Das Gestell soll die Halterung eines Flugzeugschwimmers wiedergeben. Die mit dreidimensionaler Verteilung am Schwimmer wirkenden Wasserkräfte sollen ähnlich wie im ersten Beispiel durch einen Kraftvektor V in der Symmetrieebene des Schwimmers ($y = 0$) und einen normal zu dieser Ebene gerichteten Kraftvektor Y wiedergegeben werden.

Der Schwimmer ist an vier in einem horizontalen Rechteck mit der Länge a und der Breite b angeordneten Punkten gehalten. Diese sind mit vier in der Entfernung c vertikal darüber liegenden Punkten des Flugzeugrumpfes durch Zweigelenkstäbe, die nur Normalkräfte aufnehmen können, verbunden. Außer vier vertikal gerichteten Streben sind in den vier Außenwänden des Gestells Diagonalstreben eingesetzt. Die Kräfte in diesen Streben sollen ermittelt werden. In den Vertikalstreben werden Druckkräfte positiv gerechnet, in den Diagonalstreben

Zugkräfte. Die Kräfte in nebeneinander liegenden Streben werden in folgender Weise zusammengefaßt (vgl. Abb. 5 und 6):

$$A + B - G\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \equiv A + B - \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{A}, \quad (3)$$

$$C + D - H\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \equiv C + D - \mathfrak{H} \equiv \mathfrak{C}, \quad (4)$$

$$(E + F)\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \equiv \mathfrak{E} + \mathfrak{F} \equiv \frac{\mathfrak{L}_0}{\sqrt{1 + (a/c)^2}} \equiv \mathfrak{L}. \quad (5)$$

Diese Größen sind nur von der Kraft V in der Schwimmer-Symmetrieebene abhängig. Im linken Teil von Abb. 6 sind die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ graphisch unter Zuhilfenahme der *Culmann*schen Hilfsgeraden h_s ermittelt.

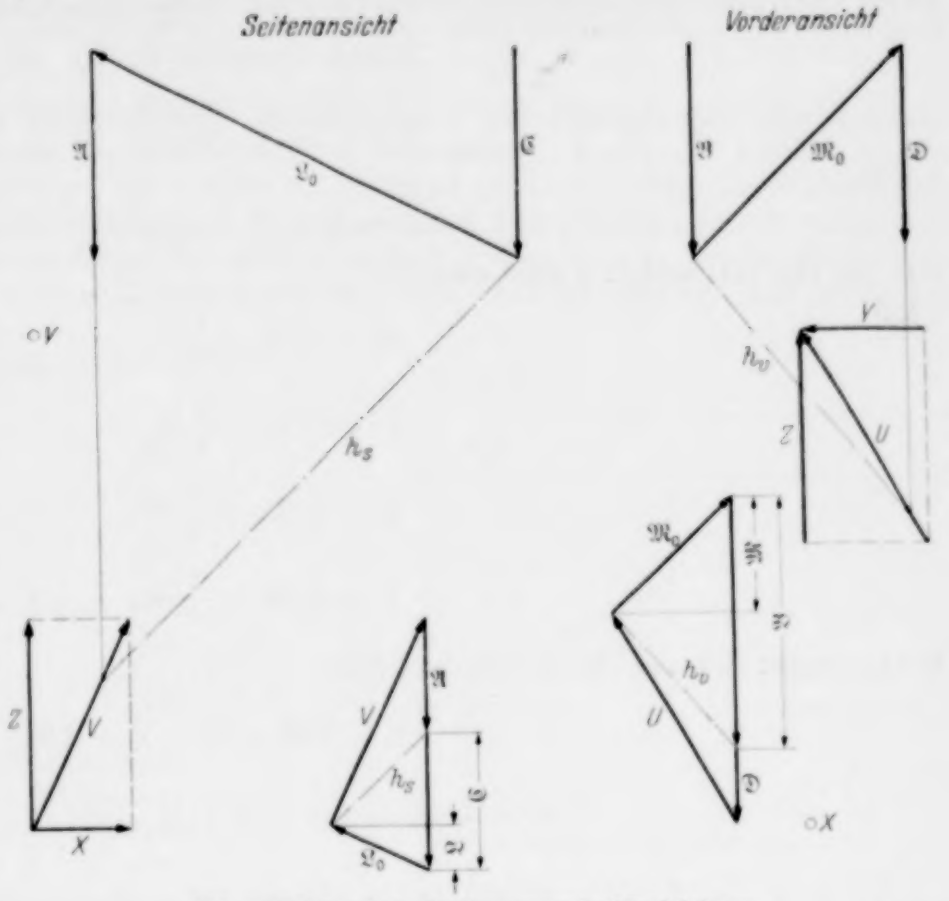


Abb. 6. Zeichnerische Bestimmungen in 2 Projektionen.

Für die Betrachtung in der Vorderansicht wird gemäß Abb. 6 der Vektor V der Seitenansicht in einem unter Y gelegenen Punkte in die Komponenten X und Z zerlegt. Sodann wird Y und Z zu einer Kraft U vereinigt (s. Vorderansicht in Abb. 6, rechter Teil).

(Arbeitsanweisung: In jeder Projektion wird nur die Lage der hierein fallenden Kraft, nicht die der senkrecht daraufstehenden Kraft berücksichtigt.)

Aus dem Vektor U können ermittelt werden (s. rechter Teil von Abb. 6):

$$B + C - F\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \equiv B + C - \mathfrak{F} \equiv \mathfrak{B}, \quad (6)$$

$$D + A - E\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \equiv D + A - \mathfrak{E} \equiv \mathfrak{D}, \quad (7)$$

$$(G + H)\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \equiv \mathfrak{G} + \mathfrak{H} \equiv \frac{\mathfrak{M}_0}{\sqrt{1 + (b/c)^2}} \equiv \mathfrak{M}. \quad (8)$$

Dabei besteht zwischen diesen Größen noch die Beziehung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C} - \mathfrak{L} = \mathfrak{B} + \mathfrak{D} - \mathfrak{M}.$$

Bisher sind also fünf voneinander unabhängige Beziehungen aufgestellt worden. Als sechste kommt hinzu: Die Drehkraft um die Hochachse ist nach Abb. 7

$$N \equiv Y x_Y = (F' - E')\frac{b}{2} + (G' - H')\frac{a}{2},$$

$$N = \frac{a\,b}{2}\left(\frac{F - E}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{G - H}{\sqrt{b^2 + c^2}}\right). \quad (9)$$

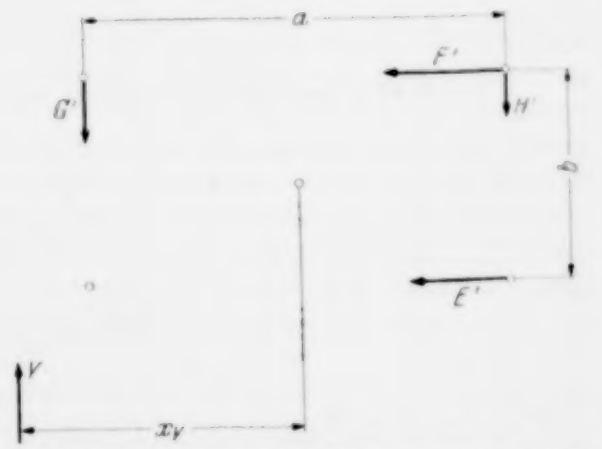


Abb. 7. Untersuchung der Drehkraft um die Hochachse (Draufsicht).

Mit

$$\mathfrak{N} \equiv \frac{2\,c\,N}{a\,b} \quad (10)$$

erhält man daraus

$$-\mathfrak{E} + \mathfrak{F} + \mathfrak{G} - \mathfrak{H} = \mathfrak{N}. \quad (11)$$

Da das Gestell acht Stäbe aufweist, ist es zweifach statisch überbestimmt. Die Stabkräfte können nur unter Hinzuziehung von zwei Beziehungen, die sich aus Nachgiebigkeitsbedingungen der Lagerung ergeben, berechnet werden. Diese Beziehungen seien

$$A + C = B + D\,, \tag{12}$$

$$\frac{F - E}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{G - H}{\sqrt{b^2 + c^2}}\,, \tag{13}$$

somit

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{F} + \mathfrak{G} - \mathfrak{H} = 0. \tag{14}$$

Aus (5), (8), (11) und (14) wird erhalten

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{L} - \frac{1}{4}\mathfrak{N}\,, \tag{15}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\mathfrak{L} + \frac{1}{4}\mathfrak{N}\,, \tag{16}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2}\mathfrak{M} + \frac{1}{4}\mathfrak{N}\,, \tag{17}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\mathfrak{M} - \frac{1}{4}\mathfrak{N}\,. \tag{18}$$

Weiter ergibt sich aus (3), (6), (4) und (12)

$$A = \frac{1}{4}(3\,\mathfrak{A} - 2\,\mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{L} + 2\,\mathfrak{M})\,, \tag{19}$$

$$B = \frac{1}{4}(\mathfrak{A} + 2\,\mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{L} + \mathfrak{N})\,. \tag{20}$$

$$C = \frac{1}{4}(-\mathfrak{A} + 2\,\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{L})\,, \tag{21}$$

$$D = \frac{1}{4}(\mathfrak{A} - 2\,\mathfrak{B} + 3\,\mathfrak{C} - \mathfrak{L} + 2\,\mathfrak{M} - \mathfrak{N})\,. \tag{22}$$

In dem gegebenen Schwimmergestell sind damit die Stabkräfte bestimmt.

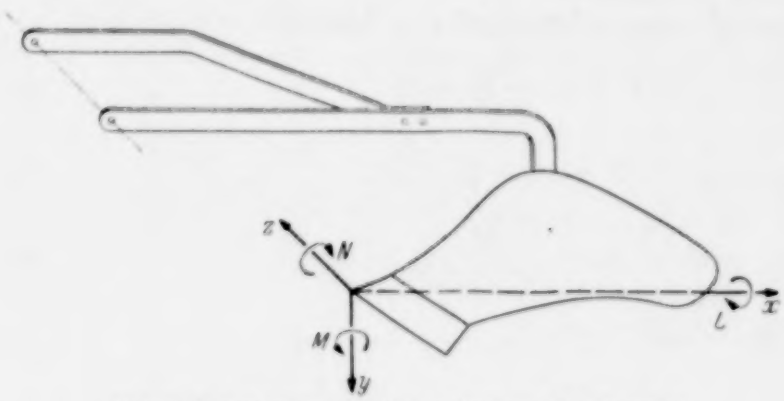


Abb. 8. Pflugkörper mit Rahmen für einen Schwingpflug.

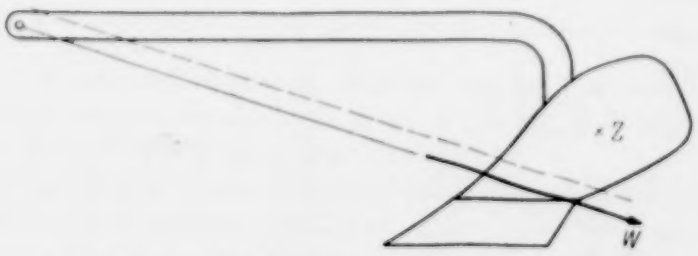


Abb. 9. Lage der Anhängeachse zur Zentralachse und zu einem rechtwinkligen Kraftkreuz (Seitenansicht).

3. Die Bedeutung rechtwinkliger Kraftkreuze. Aus den vorangegangenen Berechnungen an zwei Beispielen sind die Erleichterungen zu erkennen, die bei den Ermittlungen von Lagerkräften auftreten, wenn die einwirkenden Kräftesysteme in Form von rechtwinkligen Kraftkreuzen gegeben sind. Noch ein weiteres Beispiel zeige die praktische Bedeutung dieser Darstellungsart.

An einem Pflug, der um eine Querachse drehbar aufgehängt ist (Abb. 8), sollen die Lagebedingungen für die Schwingachse für Drehkraftausgleich bei gegebenen Pflugkräftewirkungen bestimmt werden. Die Drehkräfte um zur Z-Achse parallele Achsen werden durch die Kraftkomponente Z und die Drehkraftkomponenten L und M nicht beeinflußt, dagegen durch X, Y und N. Die Wirkung der Komponenten Z, L und M kann in dem Vektor Z zusammengefaßt werden, der gegenüber dem Bezugspunkt für L, M und N um $-L/Z$ nach hinten und um $-M/Z$ nach oben versetzt ist. Die Wirkung von X, Y und N wird durch die in Abb. 9 eingetragene Kraft W erfaßt. Für Drehkraftausgleich

muß dann die Querachse durch die Wirkungslinie der Teilkraft W gehen. Die Projektion der sogenannten Zentralachse der räumlichen Kräftegruppe in der Seitenansicht, die in Abb. 9 als gestrichelte Linie eingetragen ist, geht i. a. an der Anhängeachse vorbei. Dagegen ist die Lage der Wirkungslinie der Teilkraft eines zweckentsprechend ausgewählten rechtwinkligen Kraftkreuzes entscheidend für die Schwingachsenwahl.

4. Beziehungen zwischen rechtwinkligen Kraftkreuzen und *Plückers*chen Koordinaten. Nachdem im Vorangegangenen die Bedeutung der Darstellung räumlicher Kräftegruppen durch rechtwinklige Kraftkreuze gezeigt worden ist, sollen nunmehr die einfachen Beziehungen zwischen den Größen des rechtwinkligen Kraftkreuzes und den *Plückers*chen Koordinaten angegeben werden. Für die im folgenden aufgeschriebenen Beziehungen ist die Einschränkung gemacht, daß bei dem rechtwinkligen Kraftkreuz eine Kraft parallel zu einer Achse des Koordinatenbezugssystems verläuft.

Bei einem Kraftkreuz nach Abb. 10 erhält man

$$X = A\,, \tag{23}$$

$$Y = B\cos\lambda\,, \tag{24}$$

$$Z = -B\sin\lambda\,, \tag{25}$$

$$L = -B\,h_u = -Y\,z_y = Z\,y_z\,, \tag{26}$$

$$M = A\,z_x\,, \tag{27}$$

$$N = -A\,y_x\,; \tag{28}$$

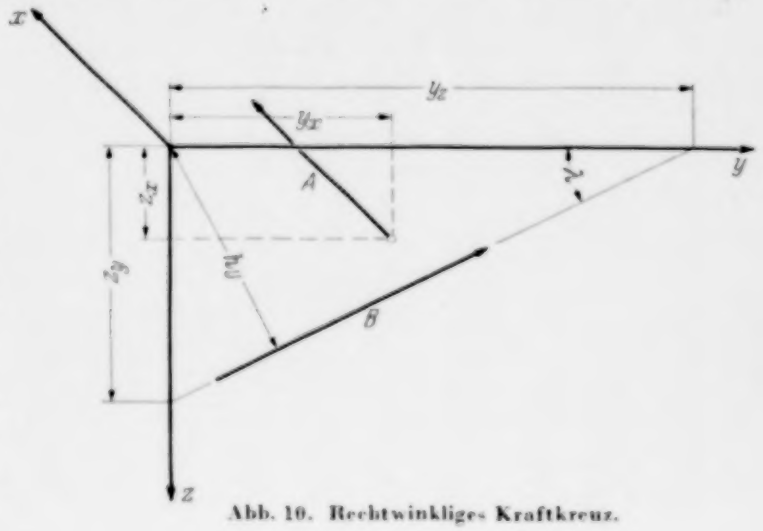


Abb. 10. Rechtwinkliges Kraftkreuz.

Nach diesen Beziehungen können auch aus gegebenen *Plückers*chen Koordinaten die Bestimmungsgrößen für ein rechtwinkliges Kraftkreuz $A = X$, $B = U$ ermittelt werden und in entsprechender Weise auch für Kraftkreuze Y, V oder Z, W. Dabei werden die folgenden Größen sämtlich bei jeweils zweien der drei Kraftkreuzbildungen gebraucht:

$$z_x = M/X\,, \tag{29}$$

$$y_x = -N/X\,. \tag{30}$$

$$x_y = N/Y\,, \tag{31}$$

$$z_y = -L/Y\,, \tag{32}$$

$$y_z = L/Z\,, \tag{33}$$

$$x_z = -M/Z\,. \tag{34}$$

Die genannten drei statisch gleichwertigen rechtwinkligen Kraftkreuze lassen sich (bei hinreichenden Größen für X, Y, Z) leicht gewinnen. Bei einem Kraftkreuz Y, V z. B. geht Y durch x_y, z_y und $V = \sqrt{X^2 + Z^2}$ durch x_z bei $z = 0$ und z_x bei $x = 0$, während $|h_l| = L/V$ ist.

5. Sätze über statisch gleichwertige Kraftkreuze. Außer der Umwandlung der drei soeben angeführten Kraftkreuze ineinander gibt es für ein räumliches Kräftesystem noch unendlich viele andere Darstellungsarten durch Kraftkreuze [1]. Ein Kräftesystem weist sechs statische Bestimmungsstücke auf, ein beliebiges Kraftkreuz dagegen zehn. Das kommt so: Zu einem Kraftvektor gehört seine Größe, die Richtung, die durch zwei voneinander unabhängige Winkel im Raum bestimmt wird, und die Lage der Wirkungslinie, die durch zwei weitere Koordinaten festgelegt ist, z. B. die Koordinaten des Durchstoßpunktes durch eine gegebene Ebene. Hat somit ein Kraftvektor fünf Bestimmungsstücke, so sind es bei zwei beliebigen Kraftvektoren zehn. Liegen dabei für das gegebene Kräftesystem sechs Bestimmungsstücke fest (s. o.), so werden bei den Kraftkreuzen vier Größen frei wählbar.

Ist eine Linie für eine Kraft vorgegeben, so entfallen vier Freiheitsgrade. Ist also für ein bestimmtes Kräftesystem von dem Kraftkreuz die e i n e W i r k u n g s l i n i e f e s t -

[1] s. z. B. *A. Föppl*, Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. II; *L. Henneberg*, Graphische Statik der starren Systeme. Leipzig 1911.

gelegt, so stehen damit die Größe dieser Kraft und Größe, Richtung und Lage der anderen Kraft fest. Von *Föppl* ist auch beschrieben, daß jede Kraft im Raum in zwei Kräfte umgewandelt werden kann, von denen die eine durch einen vorgegebenen Punkt geht und die andere in einer vorgegebenen Ebene außerhalb des vorgegebenen Punktes liegt. Da beliebig viele Kräfte in einem Punkt durch eine Resultierende ersetzt werden können und ebenfalls beliebig viele Kräfte in einer Ebene, kann ein räumliches Kräftesystem entsprechend durch ein Kraftkreuz ersetzt werden, von dem die eine Kraft durch einen bestimmten Punkt und die andere Kraft in einer bestimmten Ebene liegt. Es entfallen nun jeweils zwei Freiheitsgrade nicht nur, wenn ein Punkt oder eine Ebene vorgegeben wird, sondern auch für eine vorgegebene Richtung. So kann ein räumliches Kräftesystem i. a. durch jeweils ein Kraftkreuz ersetzt werden, wenn zwei Richtungen oder zwei Ebenen oder zwei Punkte oder ein Punkt und eine Richtung oder eine Ebene und eine Richtung festgelegt sind, z. B. die Ebene für die eine Kraft und die Richtung senkrecht zu dieser Ebene für die andere Kraft (rechtwinkliges Kraftkreuz).

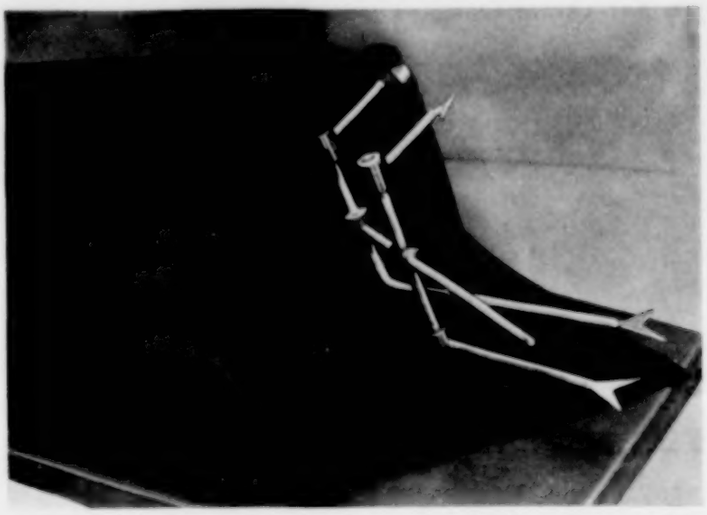


Abb. 11. Verschiebbarkeit der Kraftkreuze längs der Zentralachse, wiedergegeben an einem für die Kräfte an einem Pflugkörper angefertigten Modell.

Wird die Ebene geändert, so ergibt sich jeweils ein anderes rechtwinkliges Kraftkreuz (s. u.). Auf weitere Arten der Umbildung gleichwertiger Kraftkreuze weist Abb. 11 hin. In dieser ist an einem Pflugkörper die Zentralachse in Gestalt der schräg nach vorn im Bilde verlaufenden Stange angesetzt. Auf diese Stange sind in gleicher Weise zwei gleiche (hier rechtwinklige) Kraftkreuze verschiebbar und drehbar aufgesteckt. (In Abb. 11 sind die einzelnen entsprechenden Kräfte zueinander parallel.) Da die Zentralachse eine Sonderstellung unter allen Geraden des Raumes einnimmt, sind die beiden Kraftkreuze stets statisch gleichwertig, und es gilt der Satz:

Kraftkreuze ändern ihre Wertigkeit nicht, wenn sie insgesamt um die Zentralachse gedreht und längs derselben verschoben werden.

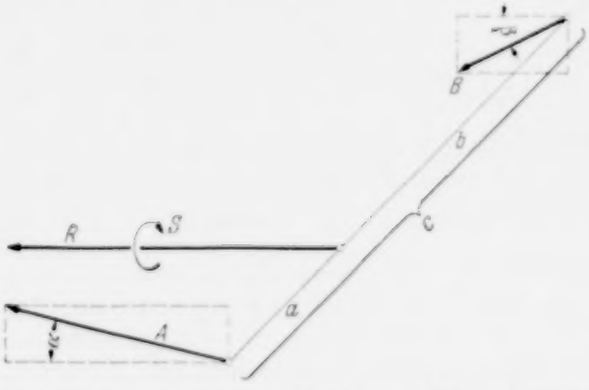


Abb. 12. Statisch gleichwertige Darstellungen mit Kraftschraube und Kraftkreuz.

Wird ein rechtwinkliges Kraftkreuz parallel längs der Zentralachse verschoben, so behält die Wirkungslinie der einen Kraft des Kraftkreuzes in der Projektion senkrecht zu der Richtung der anderen Kraft dieselbe Lage. Daraus ergibt sich auch die Arbeitsanweisung beim Beispiel II.

Über gleichwertige Kraftkreuze sind besonders im älteren Schrifttum viele heute kaum noch benutzte Sätze aufgestellt worden, wobei hauptsächlich mit dem sogen. *Möbius*schen Nullsystem gearbeitet wurde.

6. Zusammenhänge zwischen Kraftkreuzen und Kraftschraube. Nachdem zuvor die Bedeutung der Zentralachse für die Umbildung von Kraftkreuzen genannt worden ist, sollen im folgenden noch die Zusammenhänge zwischen Kraftkreuzen und der Kraftschraube geschildert werden. Stets geht die Zentralachse durch die Gerade, die der kürzesten Verbindungslinie eines beliebigen gleichwertigen Kraftkreuzes entspricht.

Als analytische Beziehungen werden nach Abb. 12 angegeben

$$a\,A\cos\alpha = b\,B\cos\beta\,, \tag{35}$$

$$A\sin\alpha = B\sin\beta\,, \tag{36}$$

$$R = A\cos\alpha + B\cos\beta\,, \tag{37}$$

$$S = c\,A\sin\alpha = c\,B\sin\beta\,. \tag{38}$$

Wenn aus einem Kraftkreuz die Kraftschraube errechnet werden soll, so ist zu beachten, daß a und b, α und β nicht einzeln bekannt sind, sondern die Summen $a + b = c$ und $\alpha + \beta = \gamma$, dazu A und B. Zur Ermittlung von α wird (36) umgeformt in

$$\frac{A}{B}\sin\alpha = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma + A/B}\,. \tag{39}$$

Aus (35) wird erhalten

$$\frac{a}{b} = \frac{B}{A}(\cos\gamma + \sin\gamma\operatorname{tg}\alpha)\,, \qquad \frac{a}{b} = \frac{\cos\gamma + B/A}{\cos\gamma + A/B}\,. \tag{40}$$

Nach dem Verhältnissatz ist dann

$$\frac{a}{c} = \frac{1 + (A/B)\cos\gamma}{1 + 2\,(A/B)\cos\gamma + (A/B)^2}\,. \tag{41}$$

Diese Beziehung ist in Abb. 13 mit der Ordinate a/c, der Abszisse A/B bzw. B/A und dem Parameter γ aufgetragen. Die Zentralachse geht außerhalb der kürzesten Verbindungslinie durch diese Gerade, sobald $a/c > 1$ bzw. < 0 erhalten wird. Weiter ist

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,A\,B\cos\gamma} \tag{42}$$

und

$$S = c\,\frac{A\,B}{R}\sin\gamma\,. \tag{43}$$

Speziell ist für $\gamma = 90°$ (rechtwinkliges Kraftkreuz)

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}\,, \tag{44}$$

$$S = c\,\frac{A\,B}{R}\,, \tag{45}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A}\,, \tag{46}$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{B}{A}\right)^2. \tag{47}$$

Danach gilt: Die Abschnitte auf der kürzesten Verbindungslinie zwischen der Zentralachse und den Wirkungslinien der Kräfte eines rechtwinkligen Kraftkreuzes verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Kräfte.

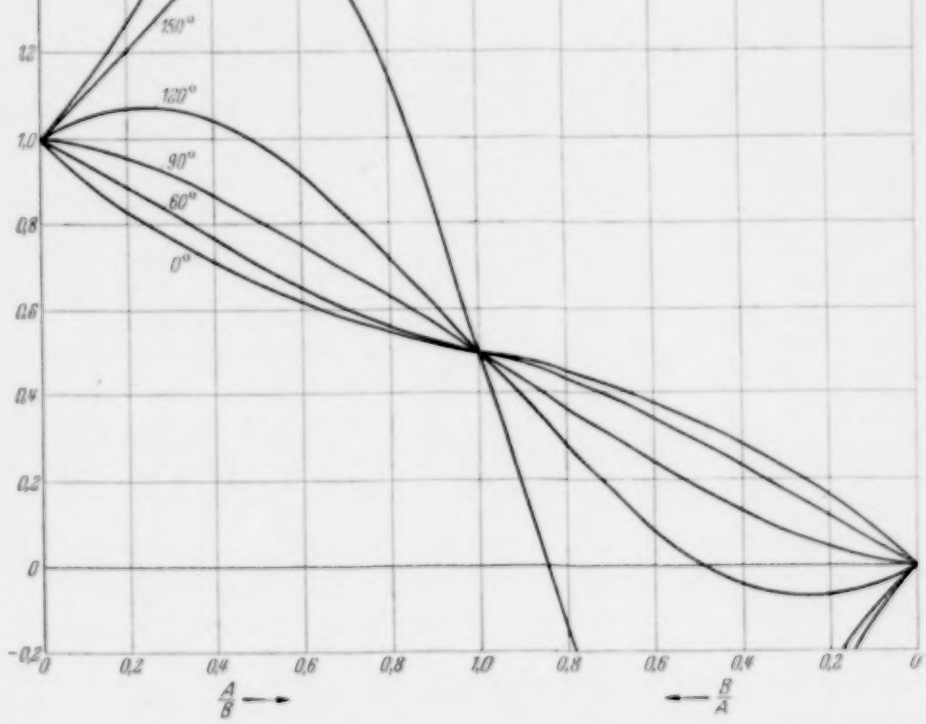


Abb. 13. Änderung der Lage des Schnittpunktes der Zentralachse auf der Geraden der kürzesten Verbindungslinie von Kraftkreuzen.

Es folgen die Beziehungen für die Umwandlung einer Kraftschraube in rechtwinklige Kraftkreuze. Bei Vorgabe einer bestimmten Ebene $\mathfrak{E}$, in der die eine Kraft und normal zu der die andere liegen soll, gibt es nur ein Kraftkreuz für eine gegebene Kraftschraube. Zwischen der Zentralachse und der Ebene $\mathfrak{E}$ besteht der Winkel $\varkappa$ (Abb. 14). Es ist dann

$$A = R\sin\varkappa\,, \tag{48}$$

$$B = R\cos\varkappa\,. \tag{49}$$

Die kürzeste Verbindungslinie des Kraftkreuzes liegt ebenfalls in der Ebene $\mathfrak{E}$ und steht senkrecht auf der Richtung von B. Nach (45) ist

$$c = \frac{S}{R}\,\frac{R^2}{A\,B} = \frac{S}{R}\,\frac{1}{\sin\varkappa\cos\varkappa}.$$

Weiter ist

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{B}{R}\right)^2 = \cos^2\varkappa,$$

also

$$a = \frac{S}{R}\operatorname{ctg}\varkappa, \tag{50}$$

$$b = \frac{S}{R}\operatorname{tg}\varkappa. \tag{51}$$

In Abb. 15 sind über $\varkappa$ die Größen $\frac{a}{S/R}$, $\frac{b}{S/R}$ und $\frac{c}{S/R}$ aufgetragen. In dem Gebiet um $\varkappa = 45°$ liegt die Entfernung c knapp über $2\,S/R$.

Nach (51) gilt der Satz:

Wird eine räumliche Kräftegruppe, von der die Kraftschraube (Zentralachse) bekannt ist, durch ein rechtwinkliges Kraftkreuz dargestellt, dann ist für eine gewählte Projektionsebene die Wirkungslinie

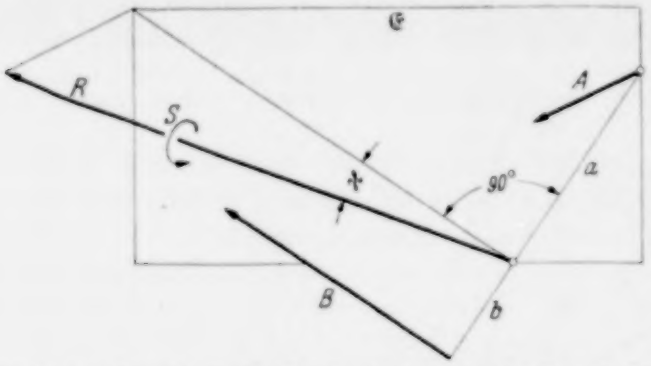


Abb. 14. Ersatz einer Kraftschraube durch ein rechtwinkliges Kraftkreuz für gegebene Sammelebene.

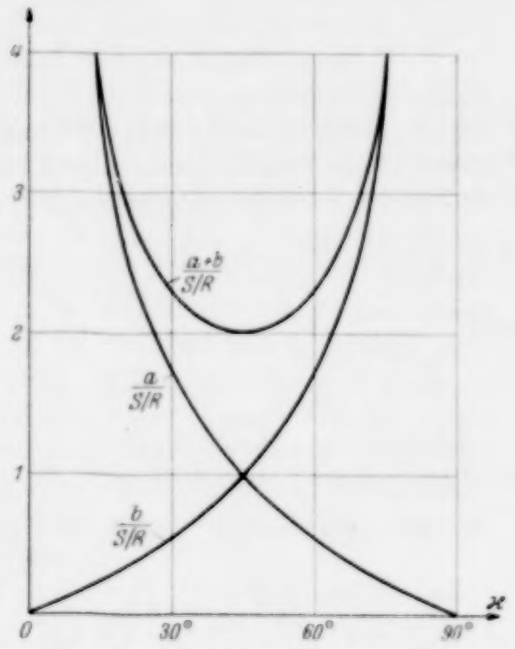


Abb. 15. Kraftabstände für gleichwertige rechtwinklige Kraftkreuze bei verschiedenen Richtungen der Sammelebenen.

der in die gewählte Ebene fallenden Kraft gegenüber der Projektion der Zentralachse um eine Strecke entfernt, die gleich dem Verhältnis vom Restmoment zur resultierenden Kraft multipliziert mit dem Verhältnis der auf der Ebene senkrecht stehenden Kraftkomponente zu der in die Ebene fallenden ist.

7. Zusammenfassung. Von den Darstellungsarten für räumliche Kräftesysteme (Kraftschraube, sechs Komponenten, Kraftkreuze) kann die letztgenannte mit Vorteil bei verschiedenen Aufgaben benutzt werden unter der Voraussetzung, daß die eine Kraft in die für die Konstruktion bedeutendste Ebene gelegt wird und die andere Kraft senkrecht zu dieser Ebene gerichtet ist. Die für die Umwandlung der Darstellungsarten gebrauchten Beziehungen sind angegeben.

Aus dem Institut für Landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Völkenrode.

(Eingegangen am 12. November 1953).

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Meves*, Braunschweig-Völkenrode, Institut für Landtechnische Grundlagenforschung.

Die Prüfung der Elektrizitätszähler. Meßeinrichtungen, Meßmethoden und Schaltungen. Von Dr.-Ing. **Karl Schmiedel**, Nürnberg. Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 183 Abb. IX. 234 Seiten Gr.-8°. 1954. Ganzleinen DM 24,50

Inhaltsübersicht: **Allgemeines und Vorschriften:** Meßgenauigkeit, Fehler, Berichtigung (Korrektion). Größenordnung der Fehler. Fehlerkurve, Fehlergrenzen. — **Methoden zur Bestimmung des Fehlers:** Langprüfung durch Zählwerksablesung. Kurzprüfung durch Zeit-Leistungs-Verfahren, durch Normalzählerverfahren, durch stroboskopische Verfahren. — **Die Fehlerkurve des Zählers und die mittleren Angaben für die Verrechnung mit Abnehmer.** — **Einrichtungen zur Erzeugung und Regelung der zugeführten Leistung:** Sparschaltung. Stromquellen. Einstellung des Hauptstromes, der Spannung, der Frequenz und der Phasenverschiebung. Konstanthaltung des Stromes, der Spannung und der Frequenz. — **Meßgeräte und Einrichtungen zur Bestimmung des Sollwerts der Angaben:** Meßgeräte und Hilfseinrichtungen zur Messung der elektrischen Größen. Geräte zur Bestimmung der Meßzeit. Prüf- und Eichzähler. Gleichlastprüfzähler und zugehörige Geräte. — **Bestimmung des Istwerts der Angaben:** Prüfung. Justierung. — **Selbsttätige Einrichtungen zur Bestimmung des Ist- oder Sollwerts der Angaben:** Integrierende Verfahren. Stroboskopische Einrichtungen. — **Prüfschaltungen:** Einphasenwechselstrom. Vierleiter-Zweiphasenwechselstrom. Dreileiter-Zweiphasenwechselstrom. Vierleiter-Drehstrom, drei Meßwerke. Dreileiter-Drehstrom, drei Meßwerke. Dreileiter-Drehstrom, zwei Meßwerke. Vierleiter-Drehstrom, zwei Meßwerke. Vier- oder Dreileiter-Drehstrom, ein Meßwerk (sogenannte Drehstromzähler für gleichbelastete Phasen). Blindverbrauchzähler. Zweileiter-Gleichstrom. Dreileiter-Gleichstrom. Prüfschaltungen unter Verwendung des Gleichlastprüfzählers. — **Prüfklemmen:** Prüfklemme für Zweileiter-Gleich oder Wechselstrom. Prüfklemme für Dreileiter-Drehstrom. — **Prüfung der Strom- und Spannungswandler.** — **Einrichtungen und Schaltungen für die Messung besonderer Eigenschaften und Vorgänge:** Drehmoment. Reibung. Reibungskompensation. Anlauf und Leerlauf. Eigenbremsung. Stoßweise Belastung. Kurvenform. Äußere Felder. Temperatur. Kurzschlußsicherheit. Isolation. Eigenverbrauch der Wicklungen. Kurzschlußwindungen. 90°-Verschiebung. Felder. Strömung in der Scheibe. Bürsten-Übergangswiderstand bei Gleichstrom-Amperestundenzähler. Gegenelektromotorische Kraft bei Gleichstromzählern. Schiefe Aufhängung. **Namenverzeichnis.** — **Sachverzeichnis.**

Der Zählerfachmann, der sich mit der Justierung und Prüfung von Elektrizitätszählern befassen muß, findet in dem Buch alle Unterlagen für seine Arbeit. Einer kurzen Zusammenstellung der amtlichen Vorschriften folgt eine kritische Behandlung der verschiedenen Prüfmethoden, wobei besonders auf praktische Beispiele Wert gelegt ist. Die Stromquellen und die Einrichtungen für die Einstellung des gewünschten Leistungswertes, weiterhin die modernen Regler zur Konstanthaltung der Meßgrößen sind in ihrer grundsätzlichen Wirkungsweise beschrieben. Außer den Präzisions- und den anderen für die Zählerprüfung gebräuchlichen Meßgeräten sind die neuen Geräte zur Rückführung der Wechselstrommessung auf die Gleichstrommessung höchster Genauigkeit mit dem Gleichstromkompensator, ferner die Röhrensender für genaue Zeitmessung und die integrierenden Geräte, insbesondere der Gleichlastzähler, die Drehstromarbeitswaage und der Spannungssymmetrieanzeiger ausführlich behandelt. Von den selbsttätigen Zählvorrichtungen und den stroboskopischen Meßeinrichtungen sind einige moderne Ausführungen beschrieben.

Die Prüfschaltungen für Wirk- und Blindverbrauchszähler nehmen einen breiten Raum ein. Im Schlußkapitel sind die bekanntesten Meßeinrichtungen für besondere Eigenschaften der Zähler, die man vorzugsweise im Laboratorium anwendet, zusammengestellt.

Elektrizitätszähler. **Tarifgeräte, Meßwandler, Schaltuhren.** Ein Buch für Zählerfachleute. Von Dr.-Ing. **P. M. Pflier**, Nürnberg. Mit 384 Abbildungen. VIII, 368 Seiten Gr.-8°. 1954. Ganzleinen DM 36,—

Inhaltsübersicht: **A. Mathematische und physikalische Grundlagen:** Mathematik. Zeichenerklärung. Elektrotechnik. Grundbegriffe der Meßtechnik. — **B. Motorzähler:** Allgemeines. Aufbau der Motorzähler. Induktionszähler für Wechselstrom. Drehstrom-Induktionszähler. Magnetmotorzähler. Eisenloser elektrodynamischer Zähler. Eisengeschlossener elektrodynamischer Zähler. Tarife. Sonderausführungen von Motorzählern und Tarifgeräte. — **C. Fernzählgeräte.** — **D. Elektrolytzähler:** Grundlagen. Forderungen. Der Wasserstoff-Elektrolytzähler. Quecksilberzähler. Anwendungsgebiet der Elektrolytzähler. — **E. Zubehör:** Allgemeines. Nebenwiderstände. Vorwiderstände. Gleichstromwandler. Stromwandler. Spannungswandler. Zusammenarbeiten von Zählern und Wandlern. Schaltuhren. Fernschalter und Netzkommandoanlagen. — **F. Zählereichung und Prüfung:** Allgemeines. Eichverfahren. Spezial-Eichgeräte der SSW. Wandlerprüfeinrichtungen. — **G. Vorschriften:** VDE-Vorschriften. Amtliche Vorschriften. — **Literaturverzeichnis.** — **Namenverzeichnis.** — **Sachverzeichnis.**

Neben den leicht wägbaren Rohstoffen beziehen Industrie, Gewerbe und Haushaltungen täglich bedeutende Energiemengen in Form von Elektrizität, die nicht ohne weiteres wägbar ist. Diese Energiemengen zu bestimmen und dem Bezieher sein volles Maß zu gewährleisten, ist Aufgabe der Elektrizitätszähler, die ebenso wie eine Waage staatlicher Aufsicht unterliegen.

In Westdeutschland werden jährlich etwa 30 Milliarden kWh über 13 Millionen Zähler abgerechnet, und es ist mit einer Verdoppelung dieses Energieverbrauches in rund 10 Jahren zu rechnen. Ein Stab von Ingenieuren, Technikern, Revisoren, Eichern und Ablesern in den Elektrizitäts-Versorgungsunternehmen, Prüfämtern und Außenstellen überwacht, pflegt und überholt diese Zähler. An sie alle wendet sich dieses Buch und bietet ihnen die Unterlagen zum tieferen Verständnis ihrer Arbeit.

Der einleitende Abschnitt behandelt die notwendigen mathematischen, physikalischen, elektrotechnischen und meßtechnischen Grundlagen. Der Hauptteil befaßt sich in leicht verständlicher Form mit dem Aufbau, der Wirkungsweise, den Eigenschaften, Fehlern, Schaltungen, Schaltfehlern sowie der Anwendung der Motorzähler und berücksichtigt besonders den am meisten verwendeten Induktionszähler. Daneben werden die selteneren Elektrolytzähler und im nächsten Abschnitt das Zähler-Zubehör beschrieben, nämlich Tarifeinrichtungen, Vor- und Nebenwiderstände, Wandler, Uhren und Spezialgeräte für Fernzählung und Netzkommandogabe. Der Schlußabschnitt bringt einen Überblick über die Prüfmethoden für Zähler und Wandler sowie die gesetzlichen Vorschriften.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Betrieb und Anwendung von Leistungs- und Regeltransformatoren.

Von Dipl.-Ing. Fritz André, Berlin. Mit 208 Abbildungen. VI, 319 Seiten Gr.-8°. 1954. Ganzleinen DM 33,—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Grundlagen:** Begriffserklärungen, Bestimmungsgrößen. — **II. Wirkungsweise:** Induktionsgesetz, Durchflutungsgesetz, Energiegesetz, Transformation, Streuung, thermische Kurzschlußfestigkeit, Frequenzänderungen, Vektorendiagramm, Kraft- und Streuflüsse, Eisen- und Luftwege. — **III. Bauart und Schaltung:** Leistungstransformatoren (*LT*), Spar-Transformatoren (*SpT*), Zusatz-Transformatoren (*ZT*), Regeltransformatoren (*RT*), Quertransformatoren (*QT/R*), Drehtransformatoren (*DrT*), Kurzschlußdrosselspulen (*KDr*), Kompensationsspulen (*Komp. Dr*), Beanspruchung, Schaltverfahren und konstruktiver Aufbau der Laststufenwähler und Lastschalter. — **IV. Hilfseinrichtungen:** Kühlungsarten, Kessel und Kühlung, Kühlanlagen, Ausdehnungsgefäße für Öltransformatoren, Buchholz-Relais für Öl-Transformatoren. — **V. Betrieb der Transformatoren:** Betriebsarten, Elektrischer Parallelbetrieb, Wirtschaftlicher Parallelbetrieb, Die Erwärmung, die Überlastung, Ein- und Ausschaltvorgänge, Überspannungsbeanspruchung. — **VI. Betriebsüberwachung:** Betriebsrevisionen an Leistungs- und Regeltransformatoren, Behandlung der Isolieröle im Betrieb. — **Anhang.** — **Literaturverzeichnis.** — **Sachverzeichnis.**

Erwärmung und Kühlung elektrischer Maschinen.

Von Dr.-Ing. **Gottfried Gotter**, Professor an der Universität Tucumán (Argentinien). Mit 158 Abbildungen und 5 Anlagen. XII. 328 Seiten Gr.-8°, 1945. Ganzleinen DM 34,50

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Die physikalischen Grundlagen:** Allgemeines über die Temperaturverteilung. Die Gleichungen von Laplace und Poisson. Der Wärmeübergang. — **II. Die Wärmeleitfähigkeit und die Wärmeübergangszahl:** Die Wärmeleitfähigkeit. Die Wärmeübergangszahlen. — **III. Eindimensionale Probleme:** Wärmedurchgang und Wärmeübergang an einer ebenen Wand. Wand mit inneren Wärmequellen. Die Wicklung als ebene Wand betrachtet. Das Temperaturfeld in zylindrischen Körpern. — **VI. Zeitlich veränderte Vorgänge:** Die klassische Theorie und ihre vereinfachenden Annahmen. Kurzfristige Überlastungen. Abkühlung und periodische Belastungen. Erweiterungen der klassischen Theorie. — **V. Die Auswirkungen der Erwärmung auf Material und Betrieb:** Alterung und Lebensdauer. Die Regel von Montsinger. Die Grenzwerte der Erwärmung und der Temperatur. Moderne Isolierstoffe. Beziehungen zwischen Grenzerwärmung und Nennleistung — **VI. Die Erwärmung der einzelnen Elemente:** Die Wärmeabgabe von Rippen. Die Berechnung des Temperaturfeldes in einem Blechpaket mit rechteckigem Querschnitt. Die Berechnung der Temperaturverteilung von ölgekühlten Wicklungen. — **VII. Die Erwärmungsberechnung von Transformatoren:** Die Wärmeabgabe von Kesseln bei natürlicher Kühlung. Die Temperaturverteilung im Kessel bei natürlicher Kühlung. Die mittlere Erwärmung der Wicklung über Raum. Der Einfluß der Aufstellungshöhe, des Windes und der Sonneneinstrahlung auf die natürliche Kühlung. Erzwungene Luft- und Ölströmung. Die Kühlung von Großtransformatoren. Besondere Aufstellungs- und Kühlarten. — **VIII. Die Kühlung der rotierenden Maschinen:** Allgemeines über die Kühlungsarten. Die Erwärmungsberechnung der einzelnen Elemente. Die Erwärmungsverteilung im Stator. Das Rückkühlverfahren. — **IX. Praktische Winke für Messungen:** Messungen im Laboratorium. Messungen an der fertigen Ausführung. — **Schrifttum.** — **Sachverzeichnis.** — **Anhang: 5 Anlagen.**

Taschenbuch der Längenmeßtechnik

für Konstruktion, Werkstatt, Meßraum und Kontrolle. In Gemeinschaft mit Dr. phil. G. Berndt, Professor an der Techn. Hochschule Dresden, und Dr.-Ing. O. Kienzle, Professor an der Techn. Hochschule Hannover herausgegeben von Dr.-Ing. **Paul Leinweber**, Berlin. Mit 790 Abbildungen und 39 Zahlentafeln im Anhang. XXIII, 806 Seiten 8°. 1954. Ganzleinen DM 27,—

Inhaltsübersicht: **1. Grundlagen:** Begriffe. Einheiten. Mathematik. Geometrische und physikalische Grundlagen. Aus der Physiologie des Messens. Austauschbau. — **2. Maße und Meßgeräte für allgemeine Zwecke:** Lineale, Platten, Maße. Mechanische Meßgeräte. Optische Meßgeräte. Elektrische Längenmeßgeräte. Pneumatische Meßgeräte. Komparatoren und Meßmaschinen. Geräte für Oberflächenprüfung und -messung. — **3. Lehren und Meßzeuge:** Gestaltung von Lehren. Fertigung von Meßzeugen. — **4. Behandlung, Pflege und Maßüberwachung von Meßmitteln:** Behandlung und Pflege. Eingangsprüfung. Laufende Überwachung von Meßmitteln. Meßmittelbefund und Auswertung. Wirtschaftliche Überwachung. — **5. Einfache Meßaufgaben:** Ebene Flächen und ihre Abstände. Einfach gekrümmte Flächen. Winkel und Kegel. Räumliche Lage. — **6. Zusammengesetzte Meßaufgaben:** Formen, profilierte Körper. Gewinde. Zahnräder. Wälzlager. Keilwelle, Kerbverzahnung. — **7. Sonderarbeitsgebiete:** Messen während des Arbeitsganges. Messen an großen Stückzahlen. Messen an Werkzeugmaschinen. Messen in der Feinwerktechnik. Messungen an optischen Teilen. — **8. Organisation des Meßwesens:** Allgemeine organisatorische Maßnahmen. Auswahl geeigneter Meßpersonen. Feinmeßraum. Anwendung der mathematischen Statistik. Wirtschaftlichkeit. — **9. Tafelanhang.** — **Sachverzeichnis.**

Dieses Taschenbuch faßt die gesamte Technik der Längen- und Winkelmessungen in gedrängter Form nach dem heutigen Stande zusammen. Es weist Wege zu meßgerechter Konstruktion und rationeller Kontrolle der gefertigten Teile. Es gibt Winke und Ratschläge in einfachen und schwierigen Fragen des Austauschbaues, zeigt Lösungsmöglichkeiten für Meßaufgaben an Zylindern, Kegeln, Ebenen, Gewinden, Zahnrädern, beschreibt alle neuzeitlichen Meßgeräte und deren Eigenschaften und gibt Hinweise für die zweckmäßige Organisation des Kontrollwesens. Zahlreiche Normen, Zahlentafeln und Übersichten machen dies neue Werk zu einem unentbehrlichen Nachschlagebuch für jeden, der sich mit Werkstattmeßtechnik zu befassen hat.

Richtig messen, Ausschuß vermeiden sind Wege zu Qualitätsarbeit, wirtschaftlicher Fertigung und Konkurrenzfähigkeit auf dem Weltmarkt. Wie man das erreicht, zeigen hier die besten Fachleute Deutschlands.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 3 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K.B./Z. 040.